



TITLE:

多孔質媒質中における超流動  
 $^3\text{He}$ (<シリーズ>超伝導・超流動研  
究の接点)

AUTHOR(S):

青山, 和司

---

CITATION:

青山, 和司. 多孔質媒質中における超流動 $^3\text{He}$ (<シリーズ>超伝導・超流動研究の接点). 物性研究 2010, 94(3): 271-310

ISSUE DATE:

2010-06-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/169341>

RIGHT:

## シリーズ「超伝導・超流動研究の接点」

多孔質媒質中における超流動 $^3\text{He}$ 京都大学大学院理学研究科 青山和司<sup>1</sup>

(2010年1月15日受理)

スポンジ状の多孔質媒質エアロジェル中における超流動 $^3\text{He}$ の研究は、非s波超流動に対する非磁性不純物の効果を検証する系として注目されてきた。この系を考察する際には、エアロジェルは単なる点状不純物ではなく、微視的な構造を反映して少なくとも局所的にはエアロジェル壁面から生じる異方性をもつという点を考慮しなければならない。エアロジェル特有の異方性と、準粒子の有効相互作用への乱れの効果を取り入れた理論解析により、エアロジェル中で実現するCooper対状態を正しく議論することができる。

## 1 はじめに

$^3\text{He}$ の超流動状態は、スピン三重項p波の対称性をもったCooper対凝縮状態であり、スピンと軌道についてそれぞれ三自由度を持った多成分秩序変数で記述される。液体 $^3\text{He}$ の超流動状態は1972年に発見され、非従来型超伝導・超流動のプロトタイプとして実験と理論両側面から精力的に研究されてきた。近年では、レーザー技術の進歩により実現した冷却原子気体の分野においてp波の超流動や内部自由度をもつBose-Einstein凝縮体を実現されつつあり、その関連性からも超流動 $^3\text{He}$ の研究が果たす役割が益々重要になってきている。超伝導と超流動の違いは、電荷の有無に加え、結晶構造を持つか持たないか、言いかえると元々系に異方性を持っているかいないかである。スピン一重項d波超伝導体ではFermi面の異方性（結晶の異方性）を反映して四回対称性を持った異方的対状態が安定化しているが、液体 $^3\text{He}$ においては結晶格子は存在せずFermi面は丸く等方的である。実際、バルク中の $^3\text{He}$ の超流動相では温度-圧力相図の大部分（図1(a)のB相領域）で、Fermi面の等方性を反映して等方的なBalian-Werthamer (BW) 対状態が実現しており、高温高压側（図1(a)のA相領域）でのみ、強結合効果によってAnderson-Brinkman-Morel (ABM) 状態と呼ばれる異方的対状態が安定化している[1]。以下では、非s波超流動に対する非磁性不純物の効果を調べる系として実験が進められているエアロジェル中超流動 $^3\text{He}$ に注目する。エアロジェルと呼ばれるスポンジ状の多孔質媒質が、この媒質特有の異方性と不純物散乱の強結合効果への寄与を通じて超流動 $^3\text{He}$ へ及ぼす効果について理論の側面から解説を行うが、まずは実験結果を含め研究背景を説明してゆくことにしよう。

<sup>1</sup>E-mail: bonn@scphys.kyoto-u.ac.jp

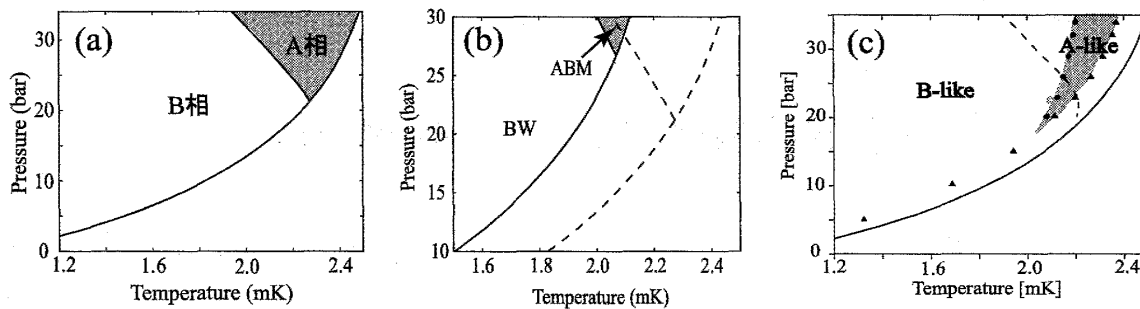


図 1: (a) バルク中での超流動  $^3\text{He}$  の相図 [1]。 (b) 一様で等方的な不純物散乱を仮定して得られた理論結果の一例。 (c) エアロジェル中での典型的な相図 [10]。

ここ十数年、エアロジェルをバルク液体の中に入れた実験により、エアロジェル中における液体  $^3\text{He}$  の超流動状態が調べられている [2]。図 2(a) に実験の模式図を、(b) はエアロジェルの構造の模式図を示す。エアロジェルは  $\text{SiO}_2$  の二次粒子が鎖状につながって構成された多孔質媒質で、ほとんどの実験において空孔率 98 % 程度という超低密度のものが用いられている。鎖を構成する  $\text{SiO}_2$  粒子の半径は  $\delta \simeq 3\text{nm}$ 、隣あう鎖間の距離に相当するエアロジェルの相関長は  $\xi_a \approx 30 - 100\text{nm}$  であり、 $\xi_a$  は超流動  $^3\text{He}$  の  $T=0$  でのコヒーレンス長 (Cooper 対のサイズ)  $\xi_0 \approx 20 - 80\text{nm}$  と同程度である [7]。エアロジェルは大局的には  $^3\text{He}$  の三次元流体粒子にとってランダムポテンシャルとして働くため、非 s 波超流動における不純物による対破壊効果の典型例として、エアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  は研究対象となった。

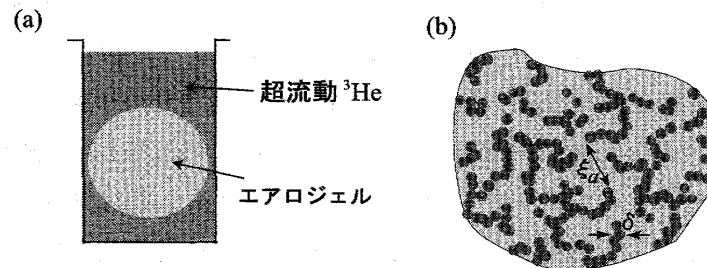


図 2: (a) エアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  実験の模式図。 (b) エアロジェルの構造 [7]。

ねじれ振子を用いた超流動密度の測定によって、初めてエアロジェル中における液体  $^3\text{He}$  の超流動転移が観測された [3]。実験で得られた超流動転移の温度-圧力曲線 ( $T_c(P)$ ) はバルク中に比べ全体的に低温側にシフトしているが、これは一様で等方的な不純物散乱を仮定したモデルで理論的に説明される。この散乱モデルに基づいた従来の理論では、不純物散乱による  $T_c$  の低温側へのシフトによって高温高压側に存在する ABM 領域が浸食され、ABM 対状態が存在できる下限圧力である多重臨界点 (PCP) は高压側にシフトすることが予想された [4](図 1(b))。実験的にも、高压側を除くほぼすべての領域は BW 対状態 (バルクの B 相と対応させて B-like 相と呼ばれている) であると認識されてきた [5, 12]。しかし今世紀に入り、continuous-wave NMR 実験による周

波数シフトと磁化の測定から、超流動転移点直下において低圧側まで Cooper 対を組む 2 粒子のスピン揃った (Equal-spin-pairing) 状態が観測されるようになった [6]。この相はバルクの A 相と対応させて A-like 相と呼ばれている。エアロジェル中の A-B 転移は温度の上昇に伴うヒステリシスが強く、A-like 相は当初は過冷却でのみ観測され、低温から温度を上げていくとき (warming) は観測されていなかった [7, 8]。最近では、warming の場合にも超流動転移線のごく近傍で A-like 相が出現することが分かっており [9, 10, 11]、実験結果から見積もられる平衡状態における A-like 相の存在領域は、バルク中に比べ温度幅が狭くなる一方で圧力幅は広がるという特徴を持つ。その結果、図 1(c) に示すようにエアロジェル中液体 <sup>3</sup>He の超流動相図においては、PCP が低圧側にシフトし、AB 転移線 ( $T_{AB}(P)$ ) の傾きがバルクとは逆符号の正 ( $dT_{AB}(P)/dP > 0$ ) となることが分かった [10, 11]。PCP の低圧側へのシフトは、先に述べた等方的な不純物散乱を仮定した従来の理論予想 (PCP が高圧側にシフトする) に反している。また、AB 転移線の傾きが正であることは、高磁場下の A1-A2 splitting の実験結果 [14] と合わせて、高圧側で A-like 相の強結合効果が大幅に弱められていることを意味している。以上をまとめると、エアロジェル中での A-like 相の特徴は、

- (1) PCP の低圧側へのシフト
- (2) 存在する温度領域が狭まり AB 転移線の傾きが正
- (3) 高圧側での強結合効果の大幅な減少、

の三点である。B-like 相は NMR 実験の結果から BW 対状態であると理解されているが [12, 13]、バルク中と極めて異なる物性を持つ A-like 相がバルクと同様の ABM 対状態かどうかは、これに対する否定的な議論もあり [17] 重要な問題であった。

この問題を解決するには、エアロジェル特有の鎖構造を考慮することと強結合効果への乱れの影響を再考することが必要である。エアロジェルは SiO<sub>2</sub> の鎖が絡み合っており構成されているため厳密には点状不純物ではなく、少なくとも局所的にはエアロジェル壁面から生じる異方性をもつので、この異方性に着目する。また、従来の理論では、強結合効果への不純物散乱の影響を準粒子の緩和時間としてのみ取り入れる緩和時間近似を用いて PCP の上昇が予想されたが [4] (図 1(b)、エアロジェル中での実験で確認された強結合効果の大幅な減少は、緩和時間近似では説明できず、別の不純物散乱の機構として、乱れによる有効相互作用の変化に注目し強結合効果への乱れの影響を議論する。以下では、準備として最初にバルク中の超流動 <sup>3</sup>He に対する定式化を行い、その後エアロジェルの異方性や強結合効果への乱れの影響について説明してゆく。

## 2 バルク中での超流動<sup>3</sup>He

<sup>3</sup>He 原子はスピン 1/2 をもつ中性 Fermi 粒子であり、液体 <sup>3</sup>He は mK の超低温において超流動状態に転移している。バルク中の超流動相は図 1(a) に示すように一次転移で隔てられた A 相、B 相の二相から成り、弱結合 BCS 理論に強結合の補正を加えた解析により、それぞれ ABM 状態、BW 状態と呼ばれる異なる対状態であることが分かる。

## 2.1 微視的理論

現実の超流動相でどのような Cooper 対状態が実現しているかを調べるには、自由エネルギーを導出し、最もエネルギーを下げる対状態を探す必要がある。以下では、Ginzburg-Landau (GL) 自由エネルギーを導出してバルク中で実現する対状態を決定する。

系を記述する準粒子の Hamiltonian は、

$$\hat{H}_{QP} = \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \int_{\mathbf{r}} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left( -\frac{\nabla^2}{2m} \right) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) + \hat{V}_{QP} \quad (1)$$

と、スピン  $\alpha$  をもつ Fermi 粒子の場の演算子  $\hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) = (1/\sqrt{V}) \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p},\alpha} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$  を用いて表される。 $m$  は準粒子の有効質量である。準粒子の有効相互作用  $\hat{V}_{QP}$  は運動量表示で

$$\hat{V}_{QP} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}',\mathbf{q}} \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p},\mathbf{p}') a_{\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\alpha}^{\dagger} a_{-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2},\beta}^{\dagger} a_{-\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{q}}{2},\beta'} a_{\mathbf{p}'+\frac{\mathbf{q}}{2},\alpha'} \quad (2)$$

と書くことができる。ここで、 $V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p},\mathbf{p}')$  は二体の散乱振幅を表しており、Fermi 粒子の演算子の交換関係から

$$V_{\beta\alpha;\alpha'\beta'}(-\mathbf{p},\mathbf{p}') = V_{\alpha\beta;\beta'\alpha'}(\mathbf{p},-\mathbf{p}') = -V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p},\mathbf{p}') \quad (3)$$

を満たしている。この関係式から

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p},\mathbf{p}') &= \frac{\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} - \delta_{\alpha,\beta'}\delta_{\beta,\alpha'}}{2} V^{(e)}(\mathbf{p},\mathbf{p}') + \frac{\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} + \delta_{\alpha,\beta'}\delta_{\beta,\alpha'}}{2} V^{(o)}(\mathbf{p},\mathbf{p}') \\ V^{(e),(o)}(\mathbf{p},\mathbf{p}') &= \pm V^{(e),(o)}(-\mathbf{p},\mathbf{p}') = \pm V^{(e),(o)}(\mathbf{p},-\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (4)$$

とスピン部分と軌道部分それぞれの対称性で分離でき、(4) 式の上段右辺第一項目がスピン一重項、第二項目がスピン三重項に対する散乱振幅である。超流動  $^3\text{He}$  がスピン三重項 p-波の Cooper 対で記述できることを前提に、(4) 式において

$$V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \frac{1}{2}(\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} + \delta_{\alpha,\beta'}\delta_{\beta,\alpha'})(-3g_1 \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}'), \quad g_1 > 0 \quad (5)$$

と、スピン三重項 p-波の引力が主な寄与をしていると仮定する。スピンに関する部分はパウリ行列  $\sigma_{\eta}$  ( $\eta = 1, 2, 3$ ) を用いて

$$\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} + \delta_{\alpha,\beta'}\delta_{\beta,\alpha'} = \sum_{\eta=1,2,3} (i\sigma_{\eta}\sigma_2)_{\beta\alpha}^{\dagger} (i\sigma_{\eta}\sigma_2)_{\beta'\alpha'}$$

と書き換えられるので、以下の弱結合 BCS Hamiltonian を出発点にすればよい。

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BCS} &= \sum_{\alpha=\uparrow,\downarrow} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \xi_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\alpha} - 3g_1 \sum_{\mathbf{q}} \hat{O}_{\eta,j}^{\dagger}(\mathbf{q}) \hat{O}_{\eta,j}(\mathbf{q}), \\ \hat{O}_{\eta,j}(\mathbf{q}) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{p_j}{p_F} \hat{a}_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2,\delta} (i\sigma_{\eta}\sigma_2)_{\delta\gamma} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2,\gamma}, \end{aligned} \quad (6)$$

$\xi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/(2m) - \mu$  であり、 $\mu$  は化学ポテンシャルである。超流動秩序を表す秩序変数は

$$A_{\eta,j}(\mathbf{q}) \equiv (-1)^{\eta+1} 3g_1 \langle \hat{O}_{\eta,j}(\mathbf{q}) \rangle \quad (7)$$

で表わされ、 $A_{\eta,j}(\mathbf{q})$  を変数とする自由エネルギーが、求めたい GL 自由エネルギーである。ギャップ関数、

$$\Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) = (i\sigma_{\eta}\sigma_2)_{\alpha\beta} A_{\eta,j}(\mathbf{q}) \hat{p}_j \quad (8)$$

を定義すれば、(6) 式はギャップ関数に対する平均場近似を用いて

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{BCS}} = & \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \xi_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha, \beta} \left( \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \beta}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \alpha}^{\dagger} \Delta_{\alpha\beta}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) + \Delta_{\alpha\beta}^{\dagger}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) \hat{a}_{-\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \alpha} \hat{a}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}/2, \beta} \right) \\ & + \frac{1}{3g_1} A_{\eta,j}^*(\mathbf{q}) A_{\eta,j}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (9)$$

と書き直せる。上式で準粒子について統計和をとれば、 $\Delta$  についての GL 自由エネルギーを導出できる。GL 自由エネルギーの具体的な表式を得る前に秩序変数  $A_{\eta,j}$  について見てゆく。秩序変数  $A_{\eta,j}$  は、s-波超伝導・超流動とは異なり、スピン  $\eta$  と軌道  $j$  についてそれぞれ三つの自由度を持つことから一般には様々な形をとることができる。以下で、バルク中で実際に実現している対状態を含め典型的な対状態をいくつか紹介する [1, 18, 19]。

#### (1) BW 対状態

$$A_{\eta,j}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta(\mathbf{q}) R_{\eta j}$$

で表され、 $R_{\eta j}$  は回転行列である。超流動ギャップは、 $|\Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q})|^2 \equiv \frac{1}{2} \text{tr}[\Delta \Delta^{\dagger}] = |\Delta(\mathbf{q})|^2$  となり、ノード（エネルギーギャップが 0 になる場所）は存在せず、図 3(a) に示すように等方的である。BW 対状態はバルクの B 相で実現している。

#### (2) ABM 対状態

$$A_{\eta,j}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta(\mathbf{q}) \hat{d}_{\eta}(\hat{m}_j + i \hat{n}_j), \quad \hat{\mathbf{m}} \perp \hat{\mathbf{n}} \perp \hat{\mathbf{l}}$$

と表される。 $|\Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q})|^2 = |\Delta(\mathbf{q})|^2 [1 - (\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2]$  となることから、ABM 対状態は、エネルギーギャップが図 3(b) の様に  $\hat{\mathbf{l}}$  方向の極点にポイントノードを持つ異方的対状態であることが分かる。ABM 対状態は、対をなす準粒子のスピンが揃った ESP 状態であり、バルクの A 相で実現している対状態である。ABM 対状態は、秩序変数の軌道部分  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルとスピン部分  $\hat{\mathbf{d}}$  ベクトルによって特徴付けられる。

#### (3) planar 状態

$$A_{\eta,j}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta(\mathbf{q}) (\delta_{j,k} - \hat{l}_j \hat{l}_k) R_{\eta k}$$

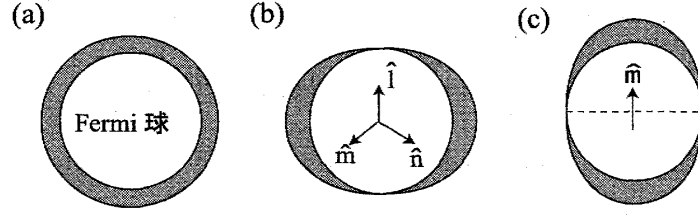


図 3: 各対状態の Fermi 面上でのギャップ構造。(a)BW、(b)ABM、(c)polar、に対応しており、それぞれフルギャップ、ポイントノード、ラインノードをもった状態である。

この状態も、ABM 状態同様エネルギーギャップが  $\hat{l}$  方向の極点でゼロになる。後で見るように、planar 状態は ABM 状態とエネルギー的にはほぼ縮退した状態である。

#### (4)polar 状態

$$A_{\eta,j}(\mathbf{q}) = \Delta(\mathbf{q}) \hat{d}_{\eta} \hat{m}_j$$

。  $|\Delta(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q})|^2 = |\Delta(\mathbf{q})|^2 (\hat{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2$  となり、エネルギーギャップは図 3(c) の様に  $\hat{\mathbf{m}}$  方向と直交する Fermi 面の赤道上にラインノードを持つため、非常に軸性の強い対状態である。

様々な対状態の安定性を議論するために、この系の自由エネルギー  $F = -(1/\beta) \ln \text{tr}[e^{-\beta \hat{H}_{\text{BCS}}}]$  を求める必要がある。(9) 式においては、BCS Hamiltonian は生成・消滅演算子に対して二次形式なので  $\text{tr}[e^{-\beta \hat{H}_{\text{BCS}}}]$  は容易に実行でき、ギャップ関数  $\Delta$  について展開を行えば GL 自由エネルギーを導出することができる [20, 21]。GL 自由エネルギー  $\mathcal{F}_{\text{GL}}$  の  $\Delta$  について最低次である二次項  $\mathcal{F}_{\text{GL},2}$ 、次低次である四次項は  $\mathcal{F}_{\text{GL},4}$  は、それぞれ図 4 の (a)、(b) で表される Feynmann ダイアグラムを計算することで求まる。図中の実線は準粒子 Green 関数  $G_{\varepsilon}(\mathbf{p})$

$$G_{\varepsilon}(\mathbf{p}) \equiv (i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})^{-1} \quad (10)$$

を表しており ( $\varepsilon$  は松原 frequency)、GL 自由エネルギーの二次項  $\mathcal{F}_{\text{GL},2}$ 、四次項  $\mathcal{F}_{\text{GL},4}$  はそれぞれ

$$\mathcal{F}_{\text{GL},2} = \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} \left[ \frac{\delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}}{3g_1} |A_{\eta,j}(\mathbf{q})|^2 - \frac{T}{2} \sum_{\varepsilon} \sum_{\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} G_{\varepsilon}(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}) G_{-\varepsilon}(-\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}) \Delta_{\alpha\beta}^{\dagger}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) \Delta_{\beta\alpha}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}') \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{GL},4} = & \frac{T}{4} \sum_{\varepsilon} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{q}_i (i=1-4)} \delta_{\sum \mathbf{q}_i, 0} G_{\varepsilon}(\mathbf{p} + \mathbf{q}_1) G_{-\varepsilon}(-\mathbf{p}) G_{\varepsilon}(\mathbf{p} + \mathbf{q}_2) G_{-\varepsilon}(-\mathbf{p} - \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3) \\ & \times \Delta_{\alpha\beta}^{\dagger}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}_1) \Delta_{\beta\gamma}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}_2) \Delta_{\gamma\delta}^{\dagger}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}_3) \Delta_{\delta\alpha}(\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{q}_4) \end{aligned} \quad (12)$$

と書くことができる。上式の  $\delta_{\sum \mathbf{q}_i, 0}$  は、運動量保存則  $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_4$  を表している。(8) 式と合わせて、 $\mathbf{p}, \varepsilon$  についての和をとることで GL 自由エネルギー  $\mathcal{F}_{\text{GL}} = \mathcal{F}_{\text{GL},2} + \mathcal{F}_{\text{GL},4}$  は、

$$\mathcal{F}_{\text{GL},2} = \sum_{\mathbf{q}} \left[ \alpha \delta_{i,j} + (K_1 q_i q_j + \frac{K_2}{2} q^2 \delta_{i,j}) \right] A_{\mu,i}^*(\mathbf{q}) A_{\mu,j}(\mathbf{q})$$

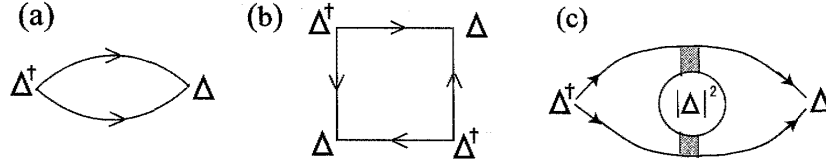


図 4: GL 作用の (a)2 次の項、(b)4 次の項、(c) 強結合効果、を表すダイアグラム。(c) では影付きの部分が無効相互作用を表している。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{GL},4} = \sum_{\mathbf{q}} & \left[ \beta_1 |A_{\mu,i} A_{\mu,i}|^2 + \beta_2 (A_{\mu,i}^* A_{\mu,i})^2 + \beta_3 A_{\mu,i}^* A_{\nu,i} A_{\mu,j} A_{\nu,j} \right. \\ & \left. + \beta_4 A_{\mu,i}^* A_{\nu,i} A_{\nu,j}^* A_{\mu,j} + \beta_5 A_{\mu,i}^* A_{\nu,i} A_{\nu,j} A_{\mu,j}^* \right] \end{aligned} \quad (13)$$

と表すことができる。 $\mathcal{F}_{\text{GL},4}$  では  $A_{\mu,i}^*(\mathbf{q})$  の  $\mathbf{q}$  依存性は省略して露わには書いていない。(13) 式における各係数は、

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} N(0) \ln \frac{T}{T_{c0}}, \\ K_1 &= K_2 = \frac{2}{5} N(0) \xi_0^2, \quad \xi_0 = \frac{v_F}{4\pi T} \sqrt{-\psi^{(2)}(1/2)/6} \\ \beta_i &= \beta_i^{(\text{wc})} \\ \beta_3^{(\text{wc})} &= \beta_2^{(\text{wc})} = \beta_4^{(\text{wc})} = -\beta_5^{(\text{wc})} = -2\beta_1^{(\text{wc})} = 2 \frac{7\zeta(3)N(0)}{240\pi^2 T^2} \equiv 2\beta_0(T) \end{aligned} \quad (14)$$

と計算され、 $\psi^{(n)}(z)$  は digamma 関数である。GL の二次項は超流動転移温度を決定しており、今の場合  $\alpha = 0$  となる温度、すなわち  $T_{c0}$  がバルクでの超流動転移温度である。 $\mathcal{F}_{\text{GL},2}$  の  $K_i$  がかかる項は微分項と呼ばれ、Cooper 対の重心の運動量  $\mathbf{q} \neq 0$  の秩序変数の空間変化から生じる自由エネルギーの損失を表しており、(11) 式において準粒子 Green 関数を  $\mathbf{q}$  について展開することで導出できる。また、弱結合 BCS Hamiltonian から求まる GL 四次項の係数は後で説明する強結合効果  $\delta\beta_i$  と区別して、 $\beta_i^{(\text{wc})}$  と書き表している。以上で、超流動  $^3\text{He}$  相図を議論する準備が整った。

## 2.2 バルク中で実現している超流動 $^3\text{He}$ の対状態

バルク中の様に空間的に一様な系での対状態を考えると、秩序変数の空間変化 (Cooper 対の重心運動量  $\mathbf{q}$  依存性) を無視することができる。自由エネルギーを秩序変数の振幅について最小化したものを凝縮エネルギーと呼び、凝縮エネルギーが最も低い対状態を探せばよい。(13) 式に BW 対状態の秩序変数の形を代入すると、

$$\frac{\mathcal{F}_{\text{GL}}}{V} = \alpha |\Delta|^2 + (\beta_{12} + \frac{\beta_{345}}{3}) |\Delta|^4$$

となる。 $|\Delta|$  について最小化を行った  $\mathcal{F}_{\text{GL}}/V$  が凝縮エネルギー密度  $f^{(\text{ce})}$  であり、

$$f_{\text{BW}}^{(\text{ce})} = -\frac{\alpha^2}{4\beta_{\text{BW}}} \quad \beta_{\text{BW}} \equiv \beta_{12} + \frac{\beta_{345}}{3}$$



となる。ここで  $\beta_{ijk} = \beta_i + \beta_j + \beta_k$  と定めた。ABM, planar (PL), polar (PO) についても同様に凝縮エネルギーを求めると、

$$\begin{aligned} f_{ABM}^{(ce)} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta_{ABM}} & \beta_{ABM} &\equiv \beta_{245} \\ f_{PL}^{(ce)} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta_{PL}} & \beta_{PL} &\equiv \beta_{12} + \frac{\beta_{345}}{2} \\ f_{PO}^{(ce)} &= -\frac{\alpha^2}{4\beta_{PO}} & \beta_{PO} &\equiv \beta_{12345} \end{aligned}$$

となることが分かる。バルク中においては GL 自由エネルギーの各係数は (14) 式のように与えられ、凝縮エネルギー  $f_N^{(ce)} = -\alpha^2/4\beta_N$  の分子はどの対状態についても同じ値をとるので、比較すべきは分母  $\beta_N$  である。 $\beta_N$  が小さければ小さい程、凝縮エネルギーを得していることになり安定である。上で挙げた対状態に関して  $\beta_N$  の比較を行うと、

$$\beta_{BW} = \frac{5}{3}\beta_0(T), \quad \beta_{ABM} = 2\beta_0(T), \quad \beta_{PL} = 2\beta_0(T), \quad \beta_{PO} = 3\beta_0(T) \quad (15)$$

となり、常に BW 対状態が安定という結果になる。これは実験結果 (A 相の存在) と矛盾するが、この問題は強結合効果を考慮することで解決される。弱結合 BCS モデルでは引力相互作用を固定していたが、実際には超流動になることで有効相互作用は変化を受けるはずである。図 4(c) に示すような、この超流動成分の有効相互作用への寄与が強結合効果である。強結合効果の大きさは  $T/E_F$  ( $E_F$  はフェルミエネルギー) でスケールされ、正常状態と超流動状態の自由エネルギー比較においてはあまり影響を与えないが、様々な対状態間のほぼ縮退した凝縮エネルギーを比較する際には極めて重要となる。強結合効果について、ここではよく知られた spin-fluctuation モデルを文献 [22] を参考に簡単に説明する。

spin-fluctuation モデルにおいては、 $^3\text{He}$  原子間に働く短距離斥力  $I > 0$  を考慮した相互作用 Hamiltonian

$$H_{\text{int}} = I \int_{\mathbf{r}} n_{\uparrow}(\mathbf{r}) n_{\downarrow}(\mathbf{r}) \quad (16)$$

が出发点である。斥力の強さ  $I$  について展開し RPA (Random Phase Approximation) を用いると、準粒子間に働く有効相互作用のスピンのうねりを表す部分は、裸の  $^3\text{He}$  原子に対する帯磁率  $\chi^{(0)}$  を用いて

$$V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -I^2 \left( (1 - I\chi^{(0)})^{-1} \chi^{(0)} \right)_{\nu\rho} (\sigma_{\nu})_{\alpha,\alpha'} (\sigma_{\rho})_{\beta,\beta'} \quad (17)$$

と表わされる。帯磁率  $\chi^{(0)}$  は正常状態においては  $\chi_{\nu\rho}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{-1}{2} (\sigma_{\nu})_{\alpha,\beta} (\sigma_{\rho})_{\gamma,\delta} \sum_{\mathbf{p},\epsilon} G_{\epsilon}(\mathbf{p}+\mathbf{q})_{\beta\gamma} G_{\epsilon}(\mathbf{p})_{\delta\alpha}$  から求まる量であるが、超流動状態になると帯磁率  $\chi^{(0)}$  に超流動成分の寄与が生じる。超流動状態においては、

$$\begin{aligned} G_{\epsilon}(\mathbf{p}+\mathbf{q})_{\beta\gamma} G_{\epsilon}(\mathbf{p})_{\delta\alpha} &\rightarrow G_{\epsilon}^s(\mathbf{p}+\mathbf{q})_{\beta\gamma} G_{\epsilon}^s(\mathbf{p})_{\delta\alpha} - F_{\epsilon}^{\dagger}(\mathbf{p}+\mathbf{q})_{\alpha\gamma} F_{\epsilon}(\mathbf{p})_{\beta\delta}, \\ F_{\epsilon}(\mathbf{p})_{\beta\delta} &= \frac{\Delta_{\beta\delta}}{\epsilon^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2}, \quad G_{\epsilon}^s(\mathbf{p})_{\beta\delta} = \delta_{\beta,\delta} \frac{i\epsilon + \xi_{\mathbf{p}}}{\epsilon^2 + \xi_{\mathbf{p}}^2 + |\Delta|^2} \end{aligned}$$

と Green 関数の中に超流動成分が現われることになる。このとき、 $\chi_{\nu\rho}^{(0)}(\mathbf{q}) \simeq \chi_N^{(0)} \delta_{\nu,\rho} + \delta\chi_{\nu\rho}^{(0)}$  と、正常状態の帯磁率  $\chi_N^{(0)}$  への超流動成分の寄与  $\delta\chi_{\nu\rho}^{(0)}$  を通じて、以下のように

$$V_{\alpha\beta;\alpha'\beta'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = -\frac{I^2 \chi_N^{(0)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{1 - I \chi_N^{(0)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} \sigma_{\alpha,\alpha'} \cdot \sigma_{\beta,\beta'} - \left( \frac{I}{1 - I \chi_N^{(0)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')} \right)^2 \delta\chi_{\nu\rho}^{(0)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (\sigma_\nu)_{\alpha,\alpha'} (\sigma_\rho)_{\beta,\beta'} \quad (18)$$

有効相互作用に超流動成分からの寄与が生じる。これが図 4(c) の意味である。上式右辺第一項目が BCS Hamiltonian の引力相互作用の起源であり、第二項目が強結合効果である。 $\delta\chi_{\nu\rho}^{(0)}$  をギャップ関数に対する最低次である二次まで展開することで、GL 自由エネルギーへの寄与を評価でき、強結合効果は GL 四次項への補正  $\delta\beta_i$  を与えることが分かる。以下には文献 [23] における数値計算結果のみを示す。

$$\begin{aligned} \delta\beta_1 &= -0.10\delta_{\text{BSA}}(T/T_{c0}) \beta_0(T), & \delta\beta_2 &= 0.20\delta_{\text{BSA}}(T/T_{c0}) \beta_0(T) \\ \delta\beta_3 &= -0.05\delta_{\text{BSA}}(T/T_{c0}) \beta_0(T), & \delta\beta_4 &= -0.55\delta_{\text{BSA}}(T/T_{c0}) \beta_0(T) \\ \delta\beta_5 &= -0.70\delta_{\text{BSA}}(T/T_{c0}) \beta_0(T) \end{aligned}$$

ここで  $\delta_{\text{BSA}}$  は [23] で定義された強結合の強さを表すパラメータで  $\delta_{\text{BSA}} \propto T_{c0}/E_F$  である。これを用いると  $T_{c0}$  近傍では、

$$\begin{aligned} \beta_{BW} &= \beta_0(T_{c0})(5/3 - 0.33\delta_{\text{BSA}}), & \beta_{ABM} &= \beta_0(T_{c0})(2 - 1.05\delta_{\text{BSA}}), \\ \beta_{PL} &= \beta_0(T_{c0})(2 - 0.55\delta_{\text{BSA}}), & \beta_{PO} &= \beta_0(T_{c0})(3 - 1.2\delta_{\text{BSA}}) \end{aligned} \quad (19)$$

となり、ABM 対状態が BW 対状態よりも凝縮エネルギーを下げる状況が可能となる。また、強結合効果を考慮することで ABM 対状態と planar 対状態の弱結合領域での凝縮エネルギーの縮退が解け、ABM 対状態が安定になっていることが分かる。BW と ABM の両対状態の凝縮エネルギーを比較してみると、 $\beta_{ABM} < \beta_{BW}$  すなわち  $\delta_{\text{BSA}} > 0.463$  では ABM 対状態が低いエネルギーを持つことが分かる。実際、高温高压領域の A 相においては強結合効果が十分に効いており ABM 対状態が安定になっている。AB 転移線など超流動転移線より低温側の相図を調べる際には、本来なら GL 六次項を考慮する必要があるが、強結合効果の圧力依存性 (ここでは  $\delta_{\text{BSA}}$  の圧力依存性) を考慮すると、GL 四次項までで十分相図を議論できる。以下では、強結合効果の圧力依存性を導入し、GL 六次項は考慮しないことにする。

### 3 エアロジェル中超流動 $^3\text{He}$

高い空孔率をもつエアロジェル媒質中では以前はバルクの B 相に相当する BW 状態のみが存在するとされていたが、近年の実験技術の進歩により超流動転移直下で Cooper 対をなす粒子のスピンがそろった ESP 状態としての A-like 相が観測され [6]、このエアロジェル中の A-like 相はバル

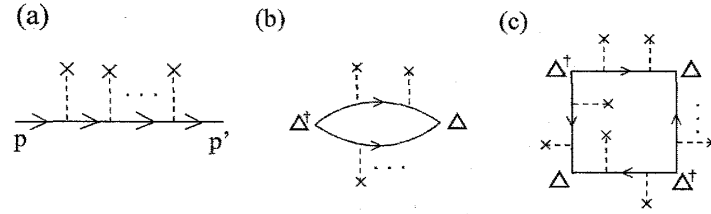


図 5: 不純物に対する空間平均をとる前の (a) 準粒子 Green 関数、(b) GL 二次項、(c) GL 四次項。点線は impurity line を、×印は散乱中心を表している。

クの A 相とは異なる特徴 (1) PCP の低圧側へのシフト (2) 存在する温度領域が狭まり AB 転移線の傾きが正 (3) 高圧側での強結合効果の大幅な減少、をもつことが分かってきた。エアロジェルは  $\text{SiO}_2$  の鎖がランダムネットワークを組んで構成されており、 $^3\text{He}$  に対しランダムポテンシャルとして働く。このランダムポテンシャルによって ABM 対状態において超流動長距離秩序が失われる [25] ことから、A-like 相は長距離秩序を保障する ABM 対状態とは異なる別の ESP 状態 (robust 相) である、という主張もあった [17]。この A-like 相がバルクの場合と同様 ABM 対状態で記述できるかどうか論点である。

### 3.1 GL 自由エネルギーへの非磁性不純物散乱の効果

多くの実験において、エアロジェル表面は  $^4\text{He}$  でコートされており [16, 6]、エアロジェル表面に吸着した固体  $^3\text{He}$  と超流動に関わる  $^3\text{He}$  原子とのスピンを介した磁気的な相互作用は除去されている。このときエアロジェルは超流動  $^3\text{He}$  に対して働く非磁性不純物とみなすことができ、この系の Hamiltonian には非磁性不純物散乱を表す項

$$\hat{H}_{\text{imp}} = \int d\mathbf{r} \sum_{\alpha} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) \quad (20)$$

が加わることとなる。 $u(\mathbf{r})$  がエアロジェル環境によって生じる散乱ポテンシャルであり、スピンの依存しない。不純物によって準粒子は散乱されるので、不純物に対する空間平均をとる前の準粒子 Green 関数  $\mathcal{G}_{\epsilon}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  は、図 5(a) のように、×印部分での不純物散乱による impurity line (点線) を介した運動量のやりとりを伴う。したがって、不純物に対する空間平均を行う前の GL 自由エネルギーの二次項、四次項は図 5(b)(c) ように表される。不純物に対する空間平均をとることは、図 5 で、impurity line を繋ぐことに対応している。問題は、いかにして不純物に対する空間平均をとり運動量積分を実行するかである。

### 3.2 平均場近似による解析

この節では、秩序変数  $A_{\mu,i}(\mathbf{q})$  への不純物による乱れの効果を見捨てた平均場近似を用いる。エアロジェルは局所的な構造を持つものの大局的には一様な分布を持つ等方的な不純物であるとみなせるので、以下の平均場近似による解析ではエアロジェルを s-波散乱が主要であるような点状不純

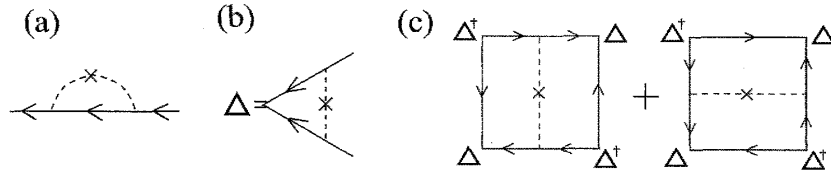


図 6: 平均場近似における不純物効果。(a) 緩和時間への寄与。(b) pair field への vertex 補正。(c) GL 四次項への緩和時間近似以外からの寄与。(b) と (c) からの寄与は等方的な不純物散乱に対しては、BW と ABM で凝縮エネルギーに相対的な差を与えない。

物として扱うことにする。この場合、ギャップ関数への不純物効果を考えない Abrikosov-Gorkov の非磁性的不純物の理論が適応できる。不純物に対する空間平均を実行すると、図 5(a) で impurity line をつないで得られる図 6(a) の緩和時間 (self energy の虚部) としての乱れの効果が主な不純物効果となる。このダイアグラムからの寄与を足し合わせることで、準粒子 Green 関数は

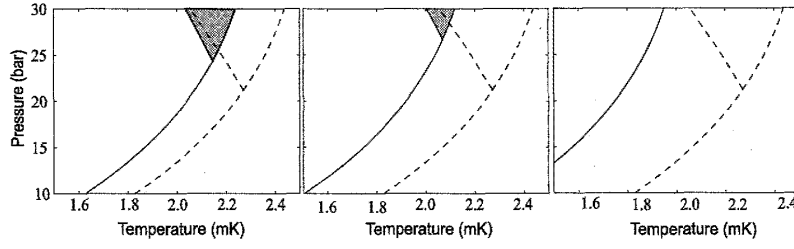
$$\bar{G}_\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} G_\varepsilon(\mathbf{p}) = \delta_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} (i\tilde{\varepsilon} - \xi_{\mathbf{p}})^{-1}, \quad \tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\text{sgn}\varepsilon}{2\tau} \quad (21)$$

と松原 frequency に変更を受ける [24]。ここで  $1/\tau = 2\pi N(0) \langle |u_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}|^2 \rangle$  であり、 $\langle \dots \rangle$  は  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' / k_F^2$  に対する角度平均を表す。この緩和時間としての不純物効果に加え、図 5(b) あるいは (c) の impurity line をつないで得られる図 6(b) の pair field への vertex 補正から生じる乱れの効果も存在するが、不純物ポテンシャルとして s-波散乱を仮定している範囲内においてはどの対状態に対しても同じ寄与をし自由エネルギーの差を生じない。従って、大局的に等方的なエアロジェルを扱う場合にはこの vertex 補正の寄与は無視することにする。(21) 式で表される不純物効果のみを扱う近似を以下では緩和時間近似と呼ぶことにする。

さて以下では GL 自由エネルギーを計算していくが、当面は秩序変数  $A_{\mu,i}(\mathbf{q})$  の空間変化は考えない。つまり  $\mathbf{q} = 0$  として計算を行う。これは、今、秩序変数への乱れの効果を考えていないので、単に自由エネルギーの損失となるだけの秩序変数の空間変化は起こらず一様な系を考えれば十分だからである。(11) 式と (12) 式に (21) 式を代入すれば GL 自由エネルギーの二次項、四次項の計算は実行できて、(13) 式の各項の係数が

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{N(0)}{3} \left[ \ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] \\ \beta_3^{(\text{wc})} &= -2\beta_1^{(\text{wc})} = -\frac{\beta_0(T)}{7\xi(3)} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) \\ \beta_2^{(\text{wc})} &= \beta_4^{(\text{wc})} = -\beta_5^{(\text{wc})} = 2 - \frac{\beta_0(T)}{7\xi(3)} \psi^{(2)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) - \beta_0(T)\varepsilon_{\text{imp}} \end{aligned} \quad (22)$$

と変更を受ける。四次項の係数には、緩和時間近似では得られない図 6(c) からの寄与  $\varepsilon_{\text{imp}}$  (図 5(c) で impurity line をつないで得られる pair field への vertex 補正以外の寄与) が含まれている [4, 15]。


 図 7: PCP の上昇。左から順に  $(2\pi\tau)^{-1}=0.08, 0.13, 0.19$  (mK)。

強結合効果は前節で見たように GL 自由エネルギー四次項への補正  $\delta\beta_j$  として現われる。しばらくは、spin-fluctuation モデルで導出された強結合効果 [23] を使い、乱れの効果は上の計算と同様に緩和時間近似で取り扱うことにする。このとき

$$\begin{aligned}\delta\beta_3 &= (\delta\beta_2 + 5\delta\beta_1)/6, & \delta\beta_4 &= \delta\beta_3 + 5\delta\beta_1, & \delta\beta_5 &= 7\delta\beta_1 \\ \delta\beta_1 &= -3.3 \times 10^{-3} \beta_0(T) t \delta_{\text{BSA}} \sum_m (D_1^{(d)}(m))^2 \\ \delta\beta_2 &= \delta\beta_1 \sum_m [9(D_2^{(d)}(m))^2 - 6D_1^{(d)}(m)D_2^{(d)}(m) - 2(D_2^{(d)}(m))^2] / \left( \sum_m [D_1^{(d)}(m)]^2 \right) \\ D_1^{(d)}(m) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|m| + 1/(2\pi T\tau)} \right] \left[ \psi\left(\frac{1}{2} + |m| + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) \right] \\ D_2^{(d)}(m) &= \frac{1}{2} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + |m| + \frac{1}{4\pi T\tau}\right)\end{aligned}$$

となり、 $t = T/T_{c0}$  である。ここで、 $\delta_{\text{BSA}}$  が強結合効果の強さを決めるパラメータであり、 $\delta_{\text{BSA}} \propto T_{c0}/E_F$  となっている。図 7 は乱れの強さを表すパラメータ  $(2\pi\tau)^{-1}$  を変化させたときの数値計算で得られた相図である。影付きの部分が ABM 領域で、左から順に  $(2\pi\tau)^{-1}=0.08, 0.13, 0.19$  (mK) であり、右に行くほど乱れが強くなっている。この図から乱れが強くなるにつれ、ABM 状態の存在する領域は温度幅、圧力幅ともに狭まるため **PCP** が上昇し [4]、一番右の図 ( $(2\pi\tau)^{-1}=0.19$  (mK)) ではもはや ABM 領域は存在しないことが分かる。この事実に基づいて、エアロジェル中の A-like 相の PCP の低圧側へのシフトは ABM 状態では説明できず、新たな対状態が実現している可能性が示唆された。また、ABM 領域を表す三角領域は乱れの強さ  $(2\pi\tau)^{-1}$  の上昇に従い狭くなり、一見強結合効果が弱くなっているように思える。しかしながら、**AB** 転移線自体は乱れが増すにつれ低温側にシフトしており、乱れが入ると強結合効果は減少というよりはむしろ少し強まっていると言える。乱れが入ることで ABM 領域が狭まるのは、強結合効果が強まることによる AB 転移線の低温側へのシフトに比べ、超流動転移温度  $T_c$  の乱れによる抑制（低温側へのシフト）の方が遥かに大きいからである。実験結果は強結合効果の減少を示唆していることから、緩和時間近似は実験結果を正しく再現せず、緩和時間近似で落とされている強結合効果への乱れの効果を考慮する必要がある。

### 3.3 A-like 相の正体は？

乱れのある系で、等方的な散乱を扱った上の計算では、低圧側まで細長く伸びるという A-like 相の特徴は A-like 相を ABM 対状態だと考えたときに説明できないことが分かった。また、ABM 対状態においてはエアロジェル特有の局所的に異方性をもつ構造に  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが pin されるため超流動長距離秩序が失われ [25]、超流動密度  $\rho_s$  は  $\rho_s = 0$  となるという指摘もなされた。この場合には、 $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが空間的にランダムな方向を向いた Larkin-Imry-Ma 状態 [26, 34] と呼ばれる超流動グラス状態が実現しているのではないかとも言われていた [27]。最近では、実験的に A-like 相において  $\rho_s \neq 0$  であることが確認されている [28]。また、先の長距離秩序消失の議論を踏まえて、A-like 相で実現する対状態の候補として長距離秩序をもつ新たな ESP 状態も提案された [17]。この新たな対状態の秩序変数は

$$A_{\mu,i} = \Delta \frac{1}{\sqrt{3}} [\hat{d}_{\mu}(\hat{m}_i + i \hat{n}_i) + \hat{e}_{\mu} \hat{l}_i]$$

と表され、 $\hat{\mathbf{d}} \perp \hat{\mathbf{e}}$  である。この対状態で記述される相は robust 相と呼ばれており、凝縮エネルギーは

$$f_R^{(\text{ce})} = -\frac{\alpha^2}{4\beta_R} \quad \beta_R \equiv \beta_2 + \frac{\beta_{13} + 5\beta_{45}}{9}$$

となる。乱れない場合の GL 自由エネルギーの表式を用いると  $\beta_R = \beta_0(T_{c0})(2.11 - 0.11\delta_{\text{BSA}})$  であり、乱れない場合には ABM 対状態や planar 対状態に比べ凝縮エネルギーで損をしている。弱く乱れたエアロジェル中で、このエネルギー損失を取り返して ABM 状態より優位にたつかどうか検討の余地ある。また、robust 相を仮定すると高磁場下の A1-A2 転移の非対称性を測定した実験結果 [14] を説明できないことも知られている [29]。こうした状況を踏まえ、エアロジェルの微細構造に起因した局所的異方性の効果（ランダムネスの効果）を取り入れ自由エネルギーの計算を行い、エアロジェル中で実現する対状態を調べた。

### 3.4 局所的異方性の効果

平均場近似の範囲内では、エアロジェル中<sup>3</sup>He 超流動相図の特徴を説明できないことが分かった。ここまでの計算では [24] に従って、不純物による散乱は等方的だとする仮定が行われていた。エアロジェルは SiO<sub>2</sub> の鎖が絡み合っているため厳密には点状不純物ではなく、少なくとも局所的にはエアロジェル壁面から生じる異方性をもつ。このエアロジェル媒質特有の異方性は、直感的には超流動<sup>3</sup>He に対し”局所的に”働くと考えられるが、コヒーレンス長  $\xi_0$  が圧力増加とともに短くなることに注意すると、”局所的”とみなせるのは低圧側の  $\xi_a \ll \xi_0$  が満たされる領域であり、高圧側の  $\xi_0 \ll \xi_a$  の場合には、むしろ”大局的”な異方性として働くと考えられる。図 8 にエアロジェルの相関長  $\xi_a$  と超流動<sup>3</sup>He の  $T = 0$  でのコヒーレンス長  $\xi_0$  の関係を示す。(a) の  $\xi_a \ll \xi_0$  の場合には、Cooper 対のサイズ内に異方的な散乱体がランダムな方向を向いて分布している状況であり、低圧側で実現していると考えられる。このエアロジェルの短距離構造の重要な点は 1. 空間的不均一性の強い乱れであり、2. 局所的な準粒子の散乱現象の異方性が強いことで

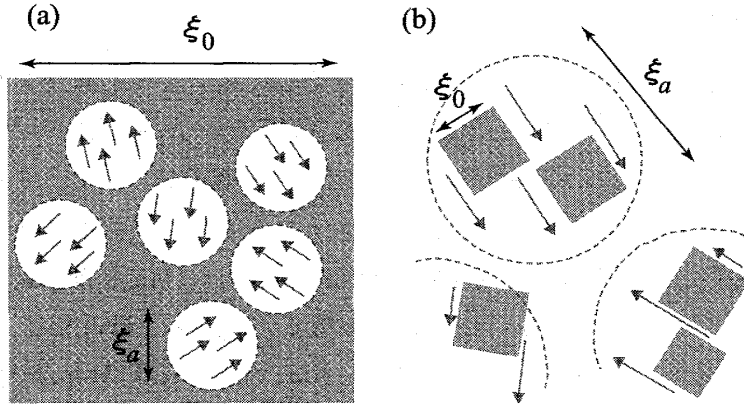


図 8: エアロジェル相関長と超流動相関長の関係。(a) 低圧側 ( $\xi_a \ll \xi_0$ ) (b) 高圧側 ( $\xi_0 \ll \xi_a$ )

ある。(b) は高圧側の  $\xi_0 \ll \xi_a$  の場合で、Cooper 対にとってエアロジェルは一樣な異方性をもった散乱体である。この場合には、大局的に等方的なエアロジェルであっても、この媒質特有の微細構造を”大局的な”異方性として扱う必要がある。以下では、PCP の低圧側へのシフトという低圧側の特徴に注目するので、超流動相関長  $\xi_0$  は十分長く (a) のモデルが適用できると考えられる。このとき 1 と 2 両方の特徴を完備したモデル化は難しいので、以下では 2 の特徴が A-like 相に関する異常現象の原因であるとして理論解析を行う。

この”局所的な”異方性を扱うためには、空間の各点で秩序変数の変化を考える必要がある。以下では (13) 式における微分項も考慮する。(21) 式の緩和時間近似の下、微分項の係数は  $K_1 = K_2 = \frac{2}{5} N(0) \xi_0^2$ ,  $\xi_0 = (v_F/4\pi T) \sqrt{-\frac{1}{6} \psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau})}$  となる。

次に先の平均場近似には含まれない不純物散乱の寄与を考えよう。平均場近似では秩序変数  $A_{\mu,i}(\mathbf{q})$  への乱れの効果はないものとして扱ったので、不純物に対する空間平均が容易に実行できた。しかし、秩序変数への不純物効果も考慮すると空間平均は単純には実行できず工夫が必要である。不純物に対する空間平均を行ったとき平均場近似には含まれない GL 二次項は、空間平均を実行する前の準粒子 Green 関数  $\mathcal{G}_\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$  を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{2,d} = & \sum_{q,q'} A_{\mu,i}^*(\mathbf{q}) A_{\mu,j}(\mathbf{q}') T \sum_{\epsilon} \left[ \frac{\delta_{i,j} \delta_{q,q'}}{3} \frac{2\pi N(0)}{2|\epsilon| + \tau^{-1}} \right. \\ & \left. - \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^6} \hat{p}_i \hat{p}'_j \mathcal{G}_\epsilon(\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \mathbf{p}' + \frac{\mathbf{q}'}{2}) \mathcal{G}_{-\epsilon}(-\mathbf{p} + \frac{\mathbf{q}}{2}, -\mathbf{p}' + \frac{\mathbf{q}'}{2}) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

と表される。上式第一項目は平均場近似で得られる二次項である。一般には準粒子は不純物によって何度も散乱を受けながら伝播するため、準粒子 Green 関数からは無数の impurity line が伸びている (図 5(a))。エアロジェルは空孔率の高い物質なので乱れの弱い系であることに注目して、不純物による散乱振幅  $u_{\mathbf{k}}$ 、あるいは言い方を換えれば impurity line について摂動展開を行うことにする。 $u_{\mathbf{k}}$  についての一次の項は図 9(a) のダイアグラムに対応し、実際に計算を実行するとこの項の寄与はゼロとなることが分かる。摂動の二次の項は、図 9(b)(c)(d) の 3 つのダイアグラ

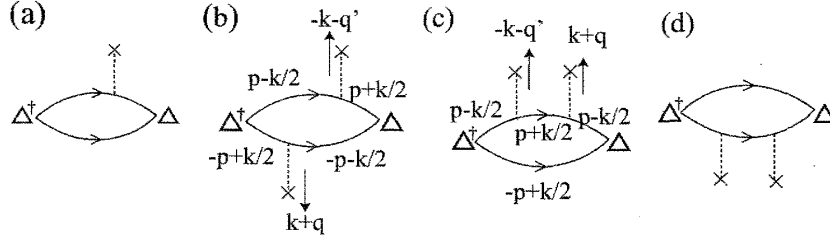


図 9: 乱れに対する摂動展開。実線が温度グリーン関数を、破線が不純物との相互作用を示す。×印は散乱中心を表す。

μ に相当し、秩序変数の重心の運動量  $\mathbf{q}, \mathbf{q}'$  が十分小さいとして、

$$\mathcal{F}_{2,d} \simeq \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') A_{\mu,i}^*(\mathbf{q}) A_{\mu,j}(\mathbf{q}') \quad (24)$$

$$J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = T \sum_{\varepsilon} \frac{\pi^2 k_F N(0)}{2E_F (2|\varepsilon| + \tau^{-1})^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k_i k_j}{|k|^3} u_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} u_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}'}$$

と評価できる。上式では、平均場近似からの寄与 ((23) 式の第一項目) は省略している。もし  $u_{\mathbf{k}}$  に波数依存性がない等方的な散乱ポテンシャルを仮定すると、上式で  $\mathbf{k}$  の方向積分からの寄与は  $\delta_{i,j}$  を与え平均場と同じ結果になる。そこでエアロジェル特有の局所的な異方性を、散乱振幅  $u_{\mathbf{k}}$  の波数依存性として表すことにする。ただし、一般にどのような形の波数依存性をもつかは不明であるので  $\mathbf{k}$  積分などの解析計算は実行できない。また、 $J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  の乱れに対する空間平均をとると、図 9(b),(c),(d) で 2 本の impurity line をつなぐことに対応しているので、これは平均場近似に属する寄与である。したがって、平均場近似からのズレで定義された  $J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  の空間平均は実質的にゼロと見なせ、 $\overline{J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')} = 0$  である。以下では、乱れに対する空間平均 をランダム平均と読みかえて、エアロジェルの局所的異方性の効果  $\mathcal{F}_{2,d}$  を秩序変数に対するランダムネス (静的乱れ) として扱うことにする。このとき、この系の GL 自由エネルギーは

$$\mathcal{F}_{\text{GL},2}^{(\text{mf})} + \mathcal{F}_{\text{GL},4}^{(\text{mf})} + \mathcal{F}_{d,2}, \quad \overline{J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')} = 0 \quad (25)$$

で表される。ここで、 $\mathcal{F}_{\text{GL},l}^{(\text{mf})}$  は平均場近似での GL の 1 次項である。求めたいのは、(25) 式から得られるこの系の自由エネルギーのランダム平均、

$$F = -T \overline{\ln Z}$$

$$Z = \text{tr}_{A_{\mu,i}} \left( \exp[-(\mathcal{F}_{\text{GL},2}^{(\text{mf})} + \mathcal{F}_{\text{GL},4}^{(\text{mf})} + \mathcal{F}_{d,2})/T] \right) \quad (26)$$

である。ランダム平均を計算することが問題となるが、これはランダムネスを扱う系でよく使われるレプリカトリックを用いることで解決され、

$$F = -T \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1}{n} \ln[\overline{Z^n}]$$

$$\overline{Z^n} = \text{tr}_{A_{\mu,i}^{(n)}} \left( \exp \left[ -(\mathcal{F}_{\text{GL},2}^{(n)} + \mathcal{F}_{\text{GL},4}^{(n)} + \mathcal{F}_d^{(n)})/T \right] \right)$$



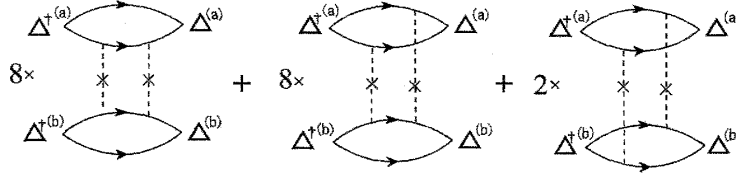


図 10: レプリカ GL を与えるダイアグラム

$$\mathcal{F}_{\text{GL},l}^{(n)} = \sum_{a=1}^n \mathcal{F}_{\text{GL},l}^{(\text{mf})}[A_{\mu,i}^{(a)}] \quad (27)$$

となる。 $\mathcal{F}_{\text{GL},l}^{(n)}$  は、異なる  $n$  個のレプリカ GL 自由エネルギーの和を表している。一方、ランダム平均されるべき量を含む  $\mathcal{F}_d^{(n)}$  は、 $\overline{J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')} = 0$  であることに注意すれば、キュムラント展開により  $J_{i,j}(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  の二次までで

$$\mathcal{F}_d^{(n)} = -\frac{1}{2T} \sum_{a,b=1}^n \sum_{\mathbf{q}_j} \overline{J_{i,j}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) J_{r,s}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)} A_{\mu,i}^{(a)*}(\mathbf{q}_1) A_{\mu,j}^{(a)}(\mathbf{q}_2) A_{\nu,r}^{(b)*}(\mathbf{q}_3) A_{\nu,s}^{(b)}(\mathbf{q}_4) \quad (28)$$

となる [30]。これは図 9 でランダム平均をとること、つまり互いに異なるレプリカ間の impurity line をつなぐことに対応しており、図 10 のダイアグラムを計算すればよいことが分かる [31, 36]。図 10 のダイアグラムを計算すると、

$$\begin{aligned} \overline{J_{i,j}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) J_{r,s}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)} &\simeq \frac{3}{5} T \delta\beta_d (\delta_{i,j} \delta_{r,s} + \delta_{i,r} \delta_{j,s} + \delta_{i,s} \delta_{r,j}) \delta_{\sum \mathbf{q}, 0} \\ \delta\beta_d &= \beta_0 \frac{\gamma}{E_F T \tau^2} \frac{5\pi^4}{42\zeta(3)} \left( \psi^{(1)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T \tau} \right) \right)^2, \\ \gamma &\equiv (\tau N(0))^2 \int_0^{k_F} \frac{dk}{2\pi^2 k_F} \overline{|u_{\mathbf{k}}|^4} \end{aligned} \quad (29)$$

と求まり、 $\delta\beta_d$  がエアロジェルの異方性を反映した係数、 $\gamma$  がその異方性の大きさを表すパラメータである。

$\mathcal{F}_d^{(n)}$  から生じる寄与は、ABM 対状態  $A_{\mu,i}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Delta(\mathbf{q}) \hat{d}_\mu(\hat{m}_i + i\hat{n}_i)$  に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_d^{(n)} &= -\frac{3}{5} \delta\beta_d \sum_{a,b} \int_{\mathbf{r}} |\Delta^{(a)}(\mathbf{r}) \Delta^{(b)}(\mathbf{r})|^2 \\ &+ \frac{3}{20} \delta\beta_d \sum_{a,b} \int_{\mathbf{r}} |\Delta^{(a)}(\mathbf{r}) \Delta^{(b)}(\mathbf{r})|^2 [1 - (\hat{\mathbf{l}}^{(a)} \cdot \hat{\mathbf{l}}^{(b)})^2]. \end{aligned} \quad (30)$$

となる。右辺の第一項目は局所的異方性による秩序変数の振幅の自由度への寄与を、第二項目は、Cooper 対の軌道自由度を特徴付ける  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルがエアロジェル構造に pin される効果を表している。一方、BW 対状態は等方的なギャップ構造を持つので秩序変数の軌道部分が pinning を受けるような項は存在せず、

$$\mathcal{F}_d^{(n)} = -\frac{1}{2} \delta\beta_d \sum_{a,b} \int_{\mathbf{r}} |\Delta^{(a)}(\mathbf{r}) \Delta^{(b)}(\mathbf{r})|^2 \quad (31)$$

と振幅の自由度への寄与を表す項のみであり、これは (30) 式において振幅への寄与の prefactor  $3/5$  を  $1/2$  にしたものになっている。

次に、求めたレプリカ GL から局所的異方性の効果を取り入れた自由エネルギーを導出するが、まともに計算するのは容易ではなく以下では静的乱れをもつ系でしばしば用いられる Gaussian Variational Method (GVM)[32, 33] を使って自由エネルギーを評価することにする。この方法の詳細は省くが簡単に言えば GVM は、秩序変数に関して四次である乱れの効果  $\mathcal{F}_d^{(n)}$  と  $\mathcal{F}_{\text{GL},4}^{(n)}$  を、秩序変数の二次項に繰り込み、自由エネルギーが最小となるように繰り込み因子を決定する方法である。つまり、秩序変数の乱れと揺らぎの効果を取り入れた計算である。 $\mathcal{F}_d^{(n)}$  は秩序変数の振幅と軌道の自由度に関して分離した形になっており、また秩序変数の空間変化を表す微分項も  $\langle \hat{\mathbf{i}} \rangle = 0$  の条件の下、同様に分離されているので、局所的異方性の振幅への寄与と軌道自由度への寄与を別々に考えることができる。

まず、振幅部分が寄与する自由エネルギー  $F_{\text{amp}}$  は乱れの局所的異方性の効果を取り込んだ凝縮エネルギーに対応しており、秩序変数の振幅に関するレプリカ GL モデルから GVM を用いて自由エネルギーを評価すると

$$\frac{F_{\text{amp},N}}{V} \simeq -\frac{|\alpha_{d,N}|}{2} |\Delta_{d,N}|^2 \quad (32)$$

$$|\Delta_{d,N}|^2 = \frac{|\alpha_{d,N}|}{2\beta_N} \quad (33)$$

という形に求まる ( $N$  は対状態を表す添え字で  $N=\text{ABM, BW, PL, } \dots$ )。これは平均場近似で得られる凝縮エネルギーの表式において GL 二次項の係数を  $\alpha \rightarrow \alpha_{d,N}$  と変更したものに対応している。GL 二次項は、平均場近似では各対状態で共通の値をとっていたが、秩序変数の乱れと揺らぎを考慮した後はその値は対状態の形に依存する。GL の二次項が超流動転移温度 ( $T_c$ ) を決定していることを思い出すと、これは異方性によって各対状態で  $T_c$  が異なることを意味している。実際、ABM、BW の両対状態に対しては、

$$\begin{aligned} \alpha_{d,\text{ABM}} &= \frac{N(0)}{3} \left[ \ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3^{5/2}T}{\pi N(0)\xi_0^3} (\beta_{\text{ABM}} - \frac{2}{5}\delta\beta_d) \\ \alpha_{d,\text{BW}} &= \frac{N(0)}{3} \left[ \ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \frac{3^{5/2}T}{\pi N(0)\xi_0^3} (\beta_{\text{BW}} - \frac{1}{3}\delta\beta_d) \end{aligned} \quad (34)$$

となり、異なる  $T_c$  を持つことが分かる。「GL の二次項=0」となる温度で  $T_c$  が決まるので、 $\beta_N$  に対応する項が小さく、 $\delta\beta_d$  からの寄与が大きい対状態ほど高い  $T_c$  をもつ。エアロジェルの局所的異方性から生じる  $\delta\beta_d$  は転移温度を上げる方向に働き、特に ABM 対状態をより安定化させていることが分かる。

次に、ABM 対状態においてエアロジェルが  $\hat{\mathbf{i}}$  を pin することによる自由エネルギー、 $F_{\text{sym}}$ 、の変化を調べる。秩序変数の軌道部分の振る舞いに興味があるので振幅のゆらぎは無視することにし (この近似は超流動転移温度から離れた低温では正しい近似になっている)、秩序変数の振幅は上記の計算で得られた乱れと揺らぎの効果を取り込んだ振幅  $|\Delta_{d,N}|$  を用いることにする。エアロジェルの局所的異方性によって生じる自由エネルギーの変化に注目しているので、以下では自由

エネルギー差  $\Delta F_{\text{sym}} = F_{\text{sym}}(\delta\beta_d) - F_{\text{sym}}(0)$  を求めることにする。 $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルに関する GL 自由エネルギーの微分項には様々なものが含まれるが、それらを直接扱う代わりにまず次の単純なモデルを考えることにする。

$$\mathcal{F}_{\text{sym}(0)}^{(n)} = \frac{|\Delta_{d,ABM}|^2}{2} \sum_{a=1}^n \int_{\mathbf{r}} K_t \partial_i \tilde{l}_j^{(a)} \partial_i \tilde{l}_j^{(a)} + \frac{3}{20} \delta\beta_d |\Delta_{MF}|^4 \sum_{a,b=1}^n \int_{\mathbf{r}} [1 - (\mathbf{l}^{(a)} \cdot \mathbf{l}^{(b)})^2],$$

このモデルは、 $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルの微分項（空間変化）とピンング項を含んでおり、これら 2 項の競合という本質的な部分を記述している。問題を単純化するために  $\hat{\mathbf{l}}$  を平面ベクトル、 $\hat{\mathbf{l}} = \hat{x} \cos(\beta(\mathbf{r})) + \hat{y} \sin(\beta(\mathbf{r}))$ 、として自由エネルギーを評価する。このとき

$$\mathcal{F}_{\text{sym}(0)}^{(n)} = \frac{\tilde{c}}{2} \sum_a \int_{\mathbf{r}} (\nabla \beta^{(a)}(\mathbf{r}))^2 - \frac{\tilde{\Delta}}{2} \sum_{a,b=1}^n \int_{\mathbf{r}} (\cos[2(\beta^{(a)}(\mathbf{r}) - \beta^{(b)}(\mathbf{r}))] - 1) \quad (35)$$

と表せ、 $\tilde{c} = |\Delta_{d,ABM}|^2 K_t$ 、 $\tilde{\Delta} = \frac{3}{20} |\Delta_d|^4 \delta\beta_d$  である。この平面  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルを仮定したモデルに対しては、弱い乱れの下では（厳密な長距離秩序はないものの）準長距離秩序が導かれ [36]、その導出過程において GVM を用いた自由エネルギーの評価がなされており [33, 36]、

$$\frac{\Delta F_{\text{sym}}}{V} \simeq -\frac{\tilde{\Delta} T}{\pi^2 \tilde{c}} q_c = -\frac{3T |\Delta_d|^2}{20\pi^2 K_t} \delta\beta_d q_c < 0$$

となる。 $q_c$  は  $q_c \sim \xi_0^{-1}$  程度の運動量のカットオフである。重要なことの一つは  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルの pinning によって自由エネルギーは負になる、つまりエネルギー的に得をすることである。二つ目は、 $\Delta F_{\text{sym}}$  は  $q_c \sim \xi_0^{-1}$  が大きい領域、つまり短距離で決まっていることである。[33] より、短距離領域は  $T \rightarrow 0$  極限 [34] の random-force モデルで記述される。random-force モデルでは  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルの準長距離秩序を導けないが、自由エネルギーを計算する上では random-force モデルで十分であることを意味している。これは、秩序変数の相関は抜きにして自由エネルギー  $F_{\text{sym}}$  の導出のみを目的とするならば、GVM を使わなくてもガウス近似で十分であることを意味している。BW 対状態に対しては、対応する pinning 項が存在しないので追加のエネルギーの得はなく  $\Delta F_{\text{sym}} = 0$  である。

超流動転移温度、pinning によるエネルギーの損得を比較するために、ABM、BW、planar、robust 状態についての情報をまとめたものが表 1 である。

表 1: 各対状態の自由エネルギーに関する量

対状態	$\beta_N$	$\beta_N$ の bulk での値	$\delta\beta_d$ の寄与	$\Delta F_{\text{sym}}/V$
BW	$\beta_{12} + \frac{1}{3}\beta_{345}$	$1.66 - 0.33\delta_{\text{BSA}}$	$-\frac{1}{3}\delta\beta_d$	$\Delta f_{\text{sym}} = 0$
ABM	$\beta_{245}$	$2 - 1.05\delta_{\text{BSA}}$	$-\frac{2}{5}\delta\beta_d$	$\Delta f_{\text{sym}} < 0$
planar	$\beta_{12} + \frac{1}{2}\beta_{345}$	$2 - 0.55\delta_{\text{BSA}}$	$-\frac{2}{5}\delta\beta_d$	$\Delta f_{\text{sym}} < 0$
robust	$\beta_2 + \frac{1}{9}(\beta_{13} + 5\beta_{45})$	$2.11 - 0.51\delta_{\text{BSA}}$	$-\frac{1}{3}\delta\beta_d$	$\Delta f_{\text{sym}} = 0$

超流動転移点直下では  $T_c$  の高い対状態が実現する。(34) 式のところで説明したように、 $\beta_N$  に対応する項が小さく、 $\delta\beta_d$  からの寄与が大きい対状態ほど高い  $T_c$  をもつ。表 1 の  $\beta_N$  の値（乱れ

のない場合での値ではあるが) と  $\delta\beta_d$  の寄与を比較すると、BW vs robust では同じ  $\delta\beta_d$  の寄与に対し  $\beta_N$  の値の小さい BW 状態の方が高い  $T_c$  をもち、ABM vs planar では同じ  $\delta\beta_d$  の寄与に対し  $\beta_N$  の値の小さい ABM 状態の方が高い  $T_c$  をもつので、結局 BW 状態と ABM 状態を比較すれば良いだけである。 $\beta_N$  中の強結合効果を表すパラメータは  $\delta_{\text{BSA}} \propto T/E_F$  と  $T/E_F$  に比例するので  $E_F$  の値が大きくなる低圧側ほど小さくなり、ABM にとっては不利である。この強結合効果の圧力変化を補うように、エアロジェルの局所的異方性に由来する  $\delta\beta_d$  の寄与が働く。つまり、強結合効果とエアロジェルの局所的異方性から生じる寄与の競合によって、PCP の低圧側へのシフトが可能である [35]。

超流動転移点直下では BW 対状態か ABM 対状態しか存在しないことが分かったが、全自由エネルギーが  $F = F_{\text{amp}} + \Delta F_{\text{sym}}$  で表されるので  $\Delta F_{\text{sym}}$  の大きさによっては転移点から少し離れたところでは別の対状態が実現している可能性がある。表 1 より robust 相は  $\Delta F_{\text{sym}} = 0$  なのでその可能性はないが、planar 状態は  $\Delta F_{\text{sym}}$  で自由エネルギーを得することで安定な領域を持つ可能性を残している。planar 状態の pinning 項は ABM 状態と同じ表式になるので、ここでは微分項に対する考察を行う。planar 状態  $a_{\mu,i} = (\delta_{i,j} - \hat{l}_i \hat{l}_j) R_{\mu j} / \sqrt{2}$  に対して

$$\begin{aligned}
 & \frac{|\Delta_{\text{d,PL}}|^2}{2} (K_2 \partial_i a_{\mu,j} \partial_i a_{\mu,j}^* + 2K_1 \partial_i a_{\mu,i} \partial_j a_{\mu,j}^*) \\
 &= \frac{K_1 + K_2}{2} |\Delta_{\text{d,PL}}|^2 \left( (\nabla \cdot \hat{\mathbf{l}})^2 + [\hat{\mathbf{l}} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{l}})]^2 + \frac{K_2}{K_1 + K_2} [\hat{\mathbf{l}} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{l}})]^2 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

となる。… 以下は平均化の操作で消える  $\partial_i R_{\mu,j}$  を含む項である。ABM 状態に対しては

$$\frac{K_1 + K_2}{8} |\Delta_{\text{d,PL}}|^2 \left( (\nabla \cdot \hat{\mathbf{l}})^2 + [\hat{\mathbf{l}} \cdot (\nabla \times \hat{\mathbf{l}})]^2 + \dots \right)$$

だったので、ABM 状態に比べ planar 状態は約 4 倍の微分エネルギーをもつことになる。 $\Delta F_{\text{sym}} \propto -(\text{微分項の係数})^{-1}$  だったので、planar 状態は ABM 状態よりも  $\Delta F_{\text{sym}}$  でエネルギーを得することはできない。planar 状態もやはり存在することができない。

計算結果を以下に示す。 $T_c(P)$  曲線は ABM と BW のどちらか  $T_c$  の高い方で定め、 $T_{\text{AB}}(P)$  line は全自由エネルギーを比較することで決定している。パラメータは、乱れの強さに相当する  $(2\pi\tau)^{-1}$ 、異方性の大きさを表す  $\gamma$ 、強結合効果の 3 つである。強結合効果の強さを表すパラメータは  $\delta_{\text{BSA}} = 300T_{c0}/E_F(P)$  と仮定し、 $E_F(P)$  圧力依存性は [37] の数値を、 $T_{c0}(P)$  の圧力依存性はバルクの超流動  $^3\text{He}$  の値 [1] を用いた。

図 11 は  $\gamma=4.6$  に固定し、 $(2\pi\tau)^{-1}$  を変化させたときの  $T_c(P)$ ,  $T_{\text{AB}}(P)$  曲線と PCP の変化を示している。点線はバルク中での転位線である。(a)  $(2\pi\tau)^{-1}=0.18$  (mK) では、PCP の低圧側へのシフト、A-like 相の存在領域の温度幅が狭まり低圧側に細長く伸びているという実験事実 (図 1(b)) と定性的に一致した結果が得られている。一方、(b)  $(2\pi\tau)^{-1}=0.13$  (mK) ではバルク中に比べ PCP は上昇しているが、 $(2\pi\tau)^{-1}$  の低下は空孔率の上昇を意味し、これによって異方性が強くなる可能性があり、 $(2\pi\tau)^{-1} = 0.13$  の場合も、現実には強い異方性、つまり  $\gamma$  が大きくなることで PCP を下げていると考えられる。

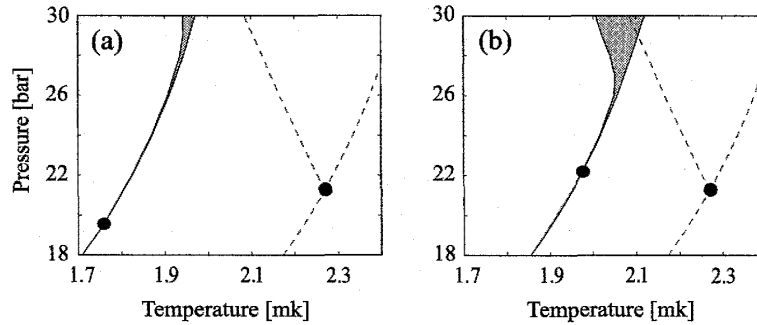


図 11:  $\gamma = 4.6$  と固定したときの  $(2\pi\tau)^{-1}$  による変化の様子。(a)  $(2\pi\tau)^{-1}=0.18$  (mK)、(b)  $0.13$  (mK) のときの  $T_c(P), T_{AB}(P)$  曲線。(a) では PCP がバルク中に比べ低圧側にシフトし、ABM 対状態の存在する温度領域も狭くなっている。

大局的に等方的なエアロジェル中においては、緩和時間近似では PCP は高圧側にシフトするものの、乱れの“局所的”異方性を考慮することで ABM 対状態が低圧側まで存在できることが分かった。さらに、新たな対状態提案の根拠となった“ $\hat{\mathbf{l}}$ ベクトルがエアロジェルの構造に pin され長距離秩序を失う”という問題に対しては、確かに厳密な長距離秩序は失われるものの、乱れが弱い場合には準長距離秩序は保たれるため  $\rho_s \neq 0$  となることが可能であり ABM 対状態が超流動相として存在できることも [36] で示された。同時に、pinning によって ABM 対状態はエネルギーを下げることも分かった。また転移点直下やそれより低温側の領域で、他の対状態の存在も検討したが、ABM、BW 以外の対状態は実現しないことも確認された。この結果、PCP の低下、存在する温度領域が狭まるといった低圧側の実験事実は A-like 相を ABM 対状態と仮定することで説明され、エアロジェル中の A-like 相、B-like 相はそれぞれバルクと同様の ABM 対状態、BW 対状態であると言える [35]。

### 3.5 大局的異方性の効果

通常の等方的なエアロジェル中では、新たな対状態の可能性が示唆されたものの、バルク液体同様 ABM 状態と BW 状態のみが存在することが分かった。PCP 低下の原因は、乱れの局所的異方性によって ABM 状態への転移温度が相対的に高くなるため、 $T_c$  近傍では ABM 状態が安定化しやすくなることであった [35]。つまり異方性は異方的な対状態を安定化させる。実際、超伝導においても、例えば  $d_{x^2-y^2}$  の対称性を持つ超伝導は結晶の 4 回対称性によって誘起されるように [38]、系の対称性を反映して異方的な対状態が実現している。異方的超伝導ではフェルミ面が異方的であるのに対し、 $^3\text{He}$  は丸いフェルミ面であり、異なる対称性を持つ対状態が縮退している。この丸いフェルミ面に外部から異方性を加えることで対状態の縮退がとけ、 $^3\text{He}$  においても新奇な対状態が実現する可能性がある。エアロジェルに一軸的な圧縮、伸張を加えることで、外部から一様な異方性を加えることができ、大局的な異方性をもつエアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  において新奇な対状態が現れることが期待される。エアロジェルに外部から伸張あるいは圧縮を加えることは

現実的にも十分可能である。また、実験で加えられ大局的異方性ならば、エアロジェルサンプルの製造過程において偶然に印加されている可能性もある。さらに、大局的に等方的なエアロジェルであっても、 $\xi_0 \ll \xi_a$  が満たされるであろう高圧側（図 8(b)）ではこの媒質特有の微細な異方性を大局的異方性として捉えた方が良く、そういった観点からも大局的異方性を扱う必要性がある。

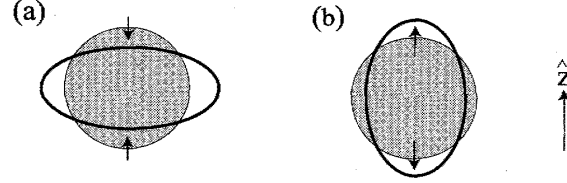


図 12: エアロジェルの (a) 圧縮、(b) 伸張。

今、図 12 に示すようにエアロジェルに  $z$  軸方向の一軸的な圧縮、伸張が加えられた状況を考える。エアロジェル媒質特有の局所的な異方性は散乱振幅  $|u_{\mathbf{k}}|^2$  における複雑な  $\mathbf{k}$  依存性として現われるが、 $\overline{|u_{\mathbf{k}}|^2}$  で表される不純物に対する空間平均をとった  $\overline{|u_{\mathbf{k}}|^2}$  においては局所的異方性によって生じる  $\mathbf{k}$  依存性はならされて見えなくなる。一軸的な異方性がある場合には、空間平均をとって局所的な異方性をならしたうえで軸方向の異方性が残るはずなので、以下のように空間平均された散乱振幅における波依存性として大局的異方性を記述することにする。

$$\overline{|u_{\mathbf{k}}|^2} = A(1 + \delta_u (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2), \quad (36)$$

$z$  軸が系全体に加える一様な異方性の向きである。 $\delta_u$  は異方性の強さを決めるパラメータで、角度平均を行う前の平均自由行程  $v_F \tau_{\mathbf{k}}$  が

$$v_F \tau_{\mathbf{k}} = \frac{v_F}{2\pi N(0) \overline{|u_{\mathbf{k}}|^2}} \propto (1 + \delta_u (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2)^{-1} \quad (37)$$

となることに注意すると、 $\delta_u < 0$  が  $z$  軸方向の平均自由行程が伸びる  $z$  軸方向の伸張を表し、 $\delta_u > 0$  が  $z$  軸方向の平均自由行程が短くなる  $z$  軸方向の圧縮を表していることが分かる。つまり、エアロジェルを伸張、圧縮する一軸的異方性の効果は (36) 式の形で平均自由行程の異方性として導入されているのである。一軸的に圧縮、伸張されたエアロジェルにおいては、前節で考察した局所的異方性の効果は大局的異方性に比べ十分小さいと考えられるので、以下では秩序変数の空間変化は考えず平均場近似を用いて議論を進めることにする。大局的に等方的なエアロジェル中とは異なり、今の場合散乱振幅に角度依存性があるので準粒子 Green 関数や pair field の vertex 補正への不純物効果を再考する必要がある。Abrikosov-Gorkov の非磁性不純物の理論 [24] を参考にし、散乱振幅が (36) 式で表されときの Green 関数の自己エネルギーへの寄与（図 6(a)）、pair field の vertex 補正（図 6(b)）を計算する。

大局的異方性をもつ不純物散乱の効果を取り入れた準粒子 Green 関数  $G_{\varepsilon}^{(\text{aiso})}(\mathbf{p})$  は、

$$G_{\varepsilon}^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}) = G_{\varepsilon}(\mathbf{p}) + G_{\varepsilon}(\mathbf{p}) \sum_{\mathbf{p}'} \overline{|u_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}|^2} G_{\varepsilon}^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}') G_{\varepsilon}^{(\text{aiso})}(\mathbf{p})$$

を解くことで得られる。この方程式の解は  $G_\varepsilon^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}) = (i\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}} - \Sigma_{\mathbf{p}})^{-1}$  と書け、 $\Sigma_{\mathbf{p}}$  は不純物散乱による準粒子の自己エネルギーを表す。 $\Sigma_{\mathbf{p}}$  の実部は、散乱振幅の  $\hat{\mathbf{p}}$  依存性が状態密度の異方性に帰着され、状態密度への補正はフェルミエネルギー  $E_F$  でスケールされることに注意すると、 $\delta_u/(\tau E_F)$  スケールされる。十分弱い乱れ  $(2\pi\tau T)^{-1} \ll 1$  の下、小さい異方性  $\delta_u \ll 1$  を考えているので、実部への寄与は  $T/E_F$  に比べ十分小さく無視できる。したがって、以下では  $\Sigma_{\mathbf{p}}$  の主な寄与は純虚数であると仮定する。 $\Sigma_{\mathbf{p}} = -i\eta_{\mathbf{p}}$  と書きかえると、大局的異方性をもつエアロジェル中では Green 関数  $G_\varepsilon^{(\text{aiso})}$  は、

$$G_\varepsilon^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}) = (i(|\varepsilon| + \eta_{\mathbf{p}})\text{sgn}\varepsilon - \xi_{\mathbf{p}})^{-1}, \quad \eta_{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\tau} [1 + \tilde{\delta}_u (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2] \quad (38)$$

と求まる。 $\tilde{\delta}_u = \delta_u(1 + \delta_u/3)^{-1}$ 、 $1/\tau = 2\pi N(0)\langle |u_{\mathbf{k}}|^2 \rangle_{\mathbf{k}}$  である。

次に pair field への vertex 補正を考える。等方的なエアロジェル中においてはどの対状態に同じ寄与をし自由エネルギーの差を生じないので無視していたが、大局的な異方性を考慮している今回は以下の議論で分かるように vertex 補正は無視することはできず、むしろ重要な役割を果たす。秩序変数の空間変化を無視すると、pair field の vertex 関数は元々の  $\hat{p}_i$  から異方性によって、方程式

$$\Gamma_i(\varepsilon, \mathbf{p}) = \hat{p}_i + \int_{\mathbf{p}'} \Gamma_i(\varepsilon, \mathbf{p}') G_\varepsilon^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}') G_{-\varepsilon}^{(\text{aiso})}(-\mathbf{p}') \overline{|u_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}|^2}. \quad (39)$$

に従う  $\Gamma_i(\varepsilon, \mathbf{p})$  に変更を受ける。異方軸  $\hat{\mathbf{z}}$  が特別な方向となっていることにより、pair field の vertex 関数は以下のように  $(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \hat{z}_i$  に比例した補正項を持つこととなる。

$$\begin{aligned} \Gamma_i(\varepsilon, \mathbf{p}) &= \hat{p}_i + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \bar{\Gamma}_\varepsilon \hat{z}_i \\ \bar{\Gamma}_\varepsilon &= -1 + \left[ 1 - 2 \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k+1} \left( \frac{-\tilde{\delta}_u \tau^{-1}}{2|\varepsilon| + \tau^{-1}} \right)^k \right]^{-1} \end{aligned} \quad (40)$$

以上の結果を用いて GL 自由エネルギーの二次項は  $\delta_u$  の一次までのオーダーで

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_{\text{GL},2}}{V} &= \left[ \frac{N(0)}{3} \left( \ln \frac{T}{T_{c0}} + T \sum_\varepsilon \frac{\pi}{|\varepsilon|} \right) \delta_{i,j} - T \sum_\varepsilon \sum_{\mathbf{p}} \hat{p}_i \Gamma_j(\varepsilon, \mathbf{p}) G_\varepsilon^{(\text{aiso})}(\mathbf{p}) G_{-\varepsilon}^{(\text{aiso})}(-\mathbf{p}) \right] A_{\mu,i}^* A_{\mu,j} \\ &\simeq \frac{N(0)}{3} \left[ \ln \frac{T}{T_{c0}} + \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\delta_u}{4\pi T\tau} \frac{1}{5} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) \right] A_{\mu,i}^* A_{\mu,i} \\ &+ \frac{N(0)}{3} \frac{\delta_u}{4\pi T\tau} \frac{16}{15} \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi T\tau}\right) A_{\mu,z}^* A_{\mu,z}, \end{aligned} \quad (41)$$

となる。(41) 式の最後の項は、vertex 補正を考慮したことにより初めて現れる項で、伸張、圧縮軸  $\hat{\mathbf{z}}$  の方向によって特徴付けられている。弱結合の GL 四次項も同様にして計算でき、等方的な場合の四次項  $\beta_1 \sim \beta_5$  に加えて、 $A_{\mu,i} A_{\mu,i} A_{\mu,z}^* A_{\mu,z}^*$  といった  $z$  方向で特徴付けられた項も生じる。しかし、相図の計算においては二次項を考慮するだけで十分であり、定性的な議論は変わらないのでここでは結果は省略する。

強結合効果  $\delta\beta_i$  の導出には前節と同様に spin-fluctuation モデルを用いることにし、前節で求めた異方性がない  $\delta_u = 0$  での表式を用いることにする。つまり、強結合効果への大局的異方性の効

果は無視するわけである。今弱い大局的異方性を想定しているので  $|\delta_u| \ll 1$  であることと、強結合効果自体も  $T/E_F$  程度と小さいことを考え合わせると、この近似は妥当であり結果に影響を与えない。

以下では  $A_{\mu,i} = |\Delta|a_{\mu,i}$  と振幅とそれ以外に分離し、 $a_{\mu,i}^* a_{\mu,i} = 1$  と規格化された  $a_{\mu,i}$  の変化に注目する。「GL 二次項=0」が超流動転移温度  $T_c$  を決定するので、(41) 式の最後の項は  $|a_{\mu,z}|^2$  の値によって  $T_c$  がシフトすることを意味している。超流動転移点直下では  $T_c$  の高い対状態が実現するので、 $\delta_u$  の正負とそのときの  $|a_{\mu,z}|^2$  の大きさにて転移点直下の対状態が決定される。

一軸圧縮に対応する  $\delta_u < 0$  のときには (41) 式の最終項が正の値をとるので、この最終項が大きい値をとるような対状態、つまり  $a_{\mu,z}$  の値が大きい対状態が高い  $T_c$  をもち、超流動点移転直下で安定化する。今、 $a_{\mu,i}^* a_{\mu,i} = 1$  と規格化されているので最も  $T_c$  が高くなるのは  $|a_{\mu,z}| = 1$  としたときで、行列表示で

$$a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と表されるときである。これは  $\hat{\mathbf{m}} = \hat{\mathbf{z}}$  としたときの polar 対状態  $a_{\mu,i} = \hat{d}_\mu \hat{m}_i$  に対応している。また、ABM 対状態  $a_{\mu,i} = \hat{d}_\mu (\hat{m}_i + i \hat{n}_i) / \sqrt{2}$  に対しては、 $|a_{\mu,z}| = 1/\sqrt{2}$  のときが最も  $T_c$  が高い状態であり、例えば

$$a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

という形を選ぶことで  $T_c$  の高い状態が得られる。この表示では  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルを  $\hat{\mathbf{l}}/\hat{x}$  となるように選んだが、 $|a_{\mu,z}| = 1/\sqrt{2}$  でありさえすればよいので  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルは  $x-y$  面内であればどの方向に選んでも良い。さて今、polar 対状態と ABM 対状態について考察を行ったが、異方性が弱い極限を考えれば分かるように低温側では BW 対状態が安定であると考えられ、少なくとも転移点直下で安定な polar 対状態が  $T_c$  から離れても安定に存在するのか、低温の BW 対状態に至るまでにどのような対状態が出現するのか、またその出現する対状態間の転移はどのようなものなのか、など自明ではない。そこで、polar, ABM, BW の対状態を含むように秩序変数  $a_{\mu,i}$  を parametrize して

$$a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \phi \sin \eta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \sin \phi \cos \eta & 0 \\ 0 & i \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

と表し、 $\theta, \phi, \eta$  の値を変化させることで最もエネルギーの下がる対状態を決定する。純粋な polar 状態として存在するのか、それとも細孔中の超流動  $^3\text{He}$  の様に [39] polar 状態と ABM 状態とが混ざり合った状態として存在するのかという点に注目して数値計算を行った。

一軸伸長に対応する  $\delta_u > 0$  の場合には、 $\delta_u < 0$  のときとは逆に (41) 式の最終項が負になるので、 $a_{\mu,z}$  の値が小さい対状態の方が  $T_c$  が高い。先の polar, ABM 対状態に対しては、それぞれ



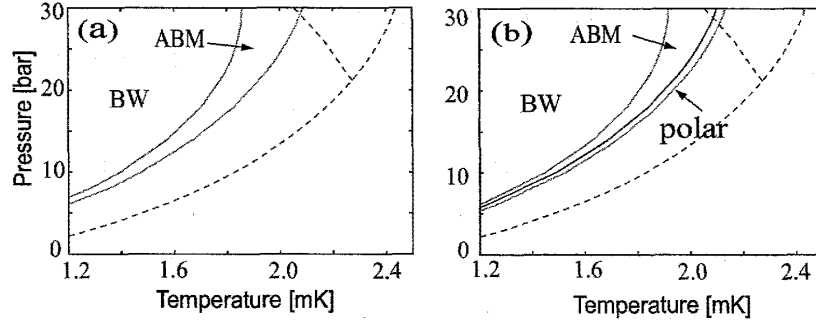


図 13: 計算結果から得られた相図。ともに  $(2\pi\tau)^{-1}=0.137$  (mK) で、(a) 圧縮 ( $\delta_u = +0.04$ )、(b) 伸張 ( $\delta_u = -0.07$ ) に対応する。

$a_{\mu,z} = 0$  となるように

$$a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

と選べば、同じ  $T_c$  をもつので、凝縮エネルギーを比較から ABM 状態が安定化すると予想される。BW 対状態は必ず  $a_{\mu,z} \neq 0$  なので高い  $T_c$  を得ることができず転移点直下では実現しない。ABM 対状態が安定な  $T_c$  直下と BW 対状態が安定になると考えられる低温側、これらの中間の温度領域で秩序変数がどのような振る舞いを示すかは自明ではないので、先の一軸伸張の場合と似た形で

$$a_{\mu,i} = \begin{bmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \cos \phi & 0 \\ 0 & \sin \theta \sin \phi \cos \eta & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta \sin \phi \sin \eta \end{bmatrix}$$

と parametrize し、 $\theta, \phi, \eta$  の値を変化させることで最もエネルギーの下がる対状態を決定する。

前節の議論から、本来なら (41) 式以外に局所的な異方性により生じる  $T_c$  のシフトが存在するが、実際に数値計算を行うと微小量であり、結果に影響を与えないので簡単のためこの  $T_c$  のシフトは無視する。以上をふまえた上で数値計算を行った結果を以下に示す。

図 13 に示したのは、乱れの強さを  $(2\pi\tau)^{-1}=0.137$  (mK) に選んだときの、(a) 大局的異方性の大きさ  $\delta_u=+0.04$  の一軸圧縮の場合、(b)  $\delta_u=-0.07$  の一軸伸張の場合の計算結果である。強結合効果の強さは  $\delta_{BSA} = 266T_{c0}/E_F(P)$  とし、 $T_{c0}(P)$ ,  $E_F(P)$  の圧力依存性はそれぞれ [1], [37] を用いている。 $\delta_u = 0$  の大局的に等方的な場合には、図 13 の圧力領域  $P < 30$  (bar) において ABM 状態が安定化する領域は存在しないので、図 13 に現れる ABM 領域は、強結合効果で安定化しているのではなく、純粋に転移温度のシフトのみに起因して安定化している。どちらの場合にも共通な特徴は、PCP が存在せず ABM 領域が広がることである。また、伸張、圧縮いずれの場合においても planar 対状態が安定化する領域は見つからなかった。

図 13(a) の一軸的な圧縮を加えた場合、超流動転移線より低温側に広く ABM 対状態が安定化しており、この ABM 対状態においては図 14(a) に示すように  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが圧縮軸方向に pin され長

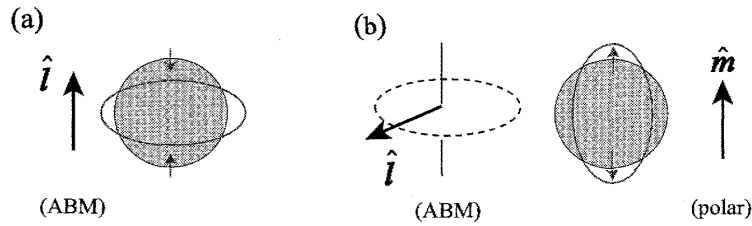


図 14: 一軸変形によって安定化する  $\hat{l}$  ベクトル (ABM 対状態)、 $\hat{m}$  ベクトル (polar 対状態) の向き。(a) 圧縮の場合、 $\hat{l}$ //圧縮軸。(b) 伸長の場合、ABM 対状態では  $\hat{l} \perp$  伸長軸、polar 対状態では  $\hat{m}$ //伸長軸。

距離秩序をもった状態が実現している。これは、並行平板に挟まれた薄い容器中の超流動とよく似た状況であり、この場合、壁に垂直な方向にギャップのノードを作るように  $\hat{l}$  ベクトルが壁面に垂直方向に固定された ABM 対状態あるいは planar 対状態が安定化している [39]。一軸圧縮を加えることは、極端なイメージとして、エアロジェルを一軸方向に圧力をかけて押しつぶすことに対応しているので、物性が二次系の振る舞いに似ていることはごく自然である。ただ、強調しておきたいのは、あくまで系は 3 次元であり、しかも付加した異方性も  $\delta_u=0.04$  とわずかだということである。エアロジェルにわずかな一軸的圧縮を加えるだけで、2 次元系と同様な状況を作り出せ、しかも大局的に等方的なエアロジェル中 ABM 対状態における  $\hat{l}$  ベクトルの準長距離秩序とは異なり厳密な長距離秩序をもった ABM 対状態が安定化するという事実は大変興味深い。

図 13(b) の一様な伸張を加えた場合、転移点直下で”純粋な” polar 対状態が安定な領域が存在し、また ABM 対状態の存在する領域が広がっている。一軸伸張した場合には、細い円筒容器中の超流動<sup>3</sup>He とよく似た状況であり、この場合にも壁に垂直な方向にギャップのノードを作るような対状態が安定化する。特に、polar 対状態は秩序変数の軌道部分を表す  $\hat{m}$  ベクトルに垂直な赤道上にラインノードを作るので細い円筒容器内に実現し易く、次いで容器の壁面にポイントノードを作るように  $\hat{l}$  ベクトルが円筒軸方向に垂直な面内を向いた ABM 対状態が安定である [39]。一軸伸張した場合には、図 14(b) に示すように細い円筒容器中と似た状況となっているわけであるが、円筒容器中と異なる点は、存在する polar 対状態が”純粋な” polar 対状態であるということである。図 15 に polar 対状態から ABM 対状態への転移における秩序変数の変化の様子を示す。 $a_{z,z} = 1$  の純粋な polar 対状態となる温度領域が存在しており、細い円筒容器中においては polar-ABM 混合状態になっているという点で異なる。図 15 中の  $a_{z,y}$  成分の温度変化は  $a_{z,y} \propto \sqrt{|T - T_{PA}|}$  に従っており、polar-ABM 転移は二次転移であることが分かる。対状態はこの二次転移を通じて温度低下に伴い、徐々に”純粋な” ABM 対状態に近づいてゆくが、純粋な ABM 対状態になる前に BW 対状態に転移するのでこの領域の ABM 対状態は”ゆがんだ” ABM 対状態と言える。

秩序変数の相関に注目してみると、図 14(b) に示すように、polar 対状態においては伸張軸に垂直な面上でラインノードを作るように  $\hat{m}$  ベクトルが固定されるので、長距離秩序をもった状態が実現している。また、ゆがんだ ABM 対状態においては、磁場中での振舞いと似て  $\hat{l}$  ベクトルは伸張軸と垂直な x-y 平面内にあるが面内での方向に特に制約はなく、この場合にはエアロジェルの

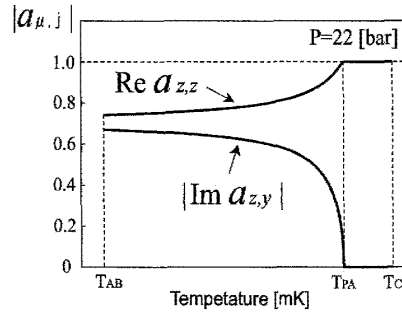


図 15: 一軸伸張の場合の秩序変数の変化

局所的な構造による pinning 効果によって厳密な長距離秩序はなく超流動グラス相になっていると考えられる。

一軸的圧縮、伸張、いずれの場合も ABM-BW 転移は一次転移であり、ここでの BW 状態もやはり ”ゆがんだ” BW 状態になっている。エアロジェルを伸張させた場合の実験では、転移点直下の polar 対状態とともに超流動グラス相としての ABM 領域の拡大が観測されることが期待される [40]。

### 3.6 強結合効果への乱れの効果

ここまでの議論で、スケールは違えど乱れの異方性が超流動転移温度付近で異方的な対状態を誘起することが分かった。相図において超流動転移温度近傍や低圧領域の特徴は乱れの異方性を導入することで説明されるが、高圧側で AB 転移近傍の特徴を支配しているのは強結合効果である。エアロジェル中においては、AB 転移線がバルク中とは異なり正の傾きを持つこと [10]、磁場下の実験において A1-A2splitting の非対称性が小さくなっていること [14] から、強結合効果の大幅な減少が示唆されている。これまでの理論では、強結合効果への乱れの効果は準粒子の緩和時間としてのみ取り入れる緩和時間近似が用いられていた [4]。緩和時間近似を用いた場合には、図 7 に示すように ABM 領域を表す三角領域は乱れの強さ  $(2\pi\tau)^{-1}$  の増加と共に狭くなり、乱れが高圧側において A-like 相 (ABM 状態) の存在領域を狭めるという実験結果は定性的には説明される。しかしながら、緩和時間近似では AB 転移線自体は乱れが増すにつれ低温側にシフトしており、乱れが入ると強結合効果は減少というよりはむしろ少し強まっていると言える。乱れによって ABM 対状態の存在領域が狭まるのは、強結合効果が強まることによる AB 転移線の低温側へのシフトに比べ、超流動転移温度  $T_c$  の乱れによる抑制 (低温側へのシフト) の方が遥かに大きいからである。実験結果は強結合効果の減少を示唆していることから、緩和時間近似は実験結果を正しく再現せず、緩和時間近似で落とされている強結合効果への乱れの効果を考慮する必要がある。

一方、これまで相図の定性的な理解には適していた spin-fluctuation モデルでは緩和時間近似を超えた理論の拡張が困難である。そこで本節では spin-fluctuation モデルは用いず、モデルに依存しないより一般的な Rainer&Serene の方法 [41] に従って強結合効果を導出する。そして、エアロ

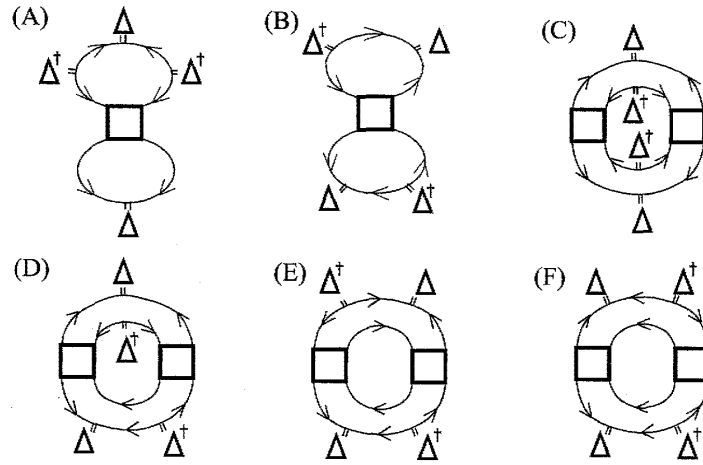


図 16: 乱れがない場合の強結合効果を表すダイアグラム。白抜き四角部分は  $T = 0$  の FPV であり、FPV の松原 frequency 依存性は考慮する必要がない。ダイアグラム (A) と (B) からの寄与は、文章中で述べる理由から効かないことが分かる。

ジェル中での強結合効果においては緩和時間近似で考慮されていない乱れの効果を導入し、緩和時間近似で得られる強結合効果との比較検討を行う。

### 3.6.1 Rainer & Serene の方法による強結合効果の導出

まず乱れがない場合の強結合効果を導出しよう。以下では平均場近似を用い、ギャップ関数  $\Delta(\mathbf{p}, \mathbf{q} = 0)$  を  $\Delta(\mathbf{p})$  と書くことにする。強結合効果の大きさをスケールする  $T/E_F$  に対してオーダーを見積もると、その最低次では図 16 のダイアグラムが寄与していることが知られている [41]。図 16 ダイアグラム中の  $\square$  は、温度ゼロ ( $T=0$ ) の 4 点 vertex (FPV)  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$  を表しており、準粒子の有効相互作用と

$$\hat{V}_{\text{QP}} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} \int_{\mathbf{r}_1} \int_{\mathbf{r}_2} \int_{\mathbf{r}_3} \int_{\mathbf{r}_4} \hat{\Psi}_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) \hat{\Psi}_{\delta}(\mathbf{r}_4) \hat{\Psi}_{\gamma}(\mathbf{r}_3). \quad (43)$$

という形で結びついている。 $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(4)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)$  は、Fermi 粒子の場合  $\hat{\Psi}_{\alpha}$  の反対称性から粒子の入れ換えに対し反対称である。図 16(A) は、弱結合での GL 四次項において pair-field に有効相互作用による vertex 補正を加えたダイアグラムであり、この補正は小さい上にどの対状態に対しても同じ寄与をして対状態間の自由エネルギー差を生まないため、このダイアグラムは無視できる。図 16(B) のダイアグラムについては、 $T = 0$  の FPV 部分“ $\square$ ”が松原 frequency を運ばないことに注意すると運動量の角度積分を除いて FPV 部分（ $\square$  部分）を境に上下独立に扱うことができるので、松原 frequency についての和をとるとゼロになる。よってこの図 16(B) のダイアグラムからの寄与も考える必要がない。結局、強結合効果へは図 16(C)～(F) のダイアグラムが寄与し、例えば、図 16(C) に対しては、

$$\text{Fig. (C)} = -\frac{T^3}{8} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3} G_{\varepsilon_1}(\mathbf{p}_1) G_{-\varepsilon_1}(-\mathbf{p}_1) G_{\varepsilon_2}(\mathbf{p}_2) G_{-\varepsilon_2}(-\mathbf{p}_2) G_{\varepsilon_3}(\mathbf{p}_3) G_{-\varepsilon_3}(-\mathbf{p}_3)$$

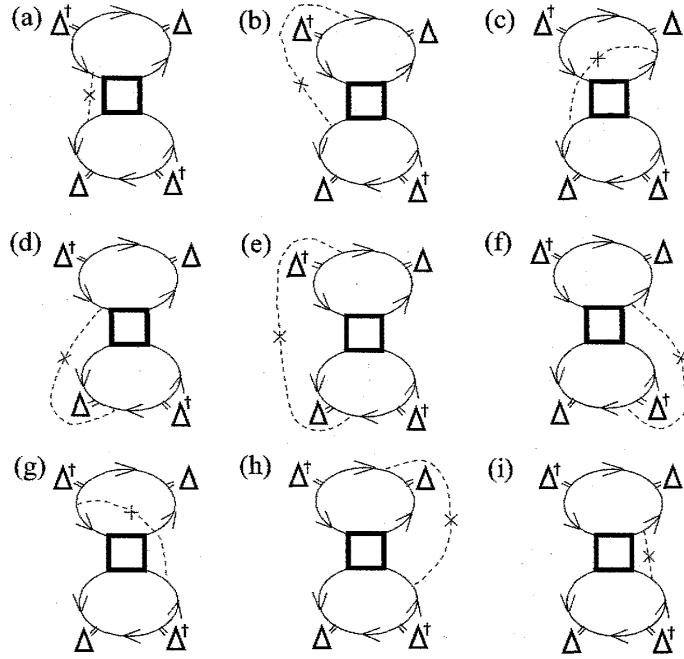


図 17: 緩和時間近似で考慮されていない、有効相互作用への乱れの効果に起因した強結合効果のダイアグラム。(a), (b), (d) は、それぞれ (i), (f), (h) と同じダイアグラムになっている。

$$\begin{aligned} & \times G_{\varepsilon_4}(\mathbf{p}_4) G_{-\varepsilon_4}(-\mathbf{p}_4) \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4}^{(4)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) \Gamma_{\beta_1, \beta_2; \beta_3, \beta_4}^{(4)}(-\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2; -\mathbf{p}_3, -\mathbf{p}_4) \\ & \times \Delta_{\alpha_1 \beta_1}(\hat{\mathbf{p}}_1) \Delta_{\alpha_2 \beta_2}(\hat{\mathbf{p}}_2) \Delta_{\beta_3 \alpha_3}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_3) \Delta_{\beta_4 \alpha_4}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_4) \end{aligned}$$

と書くことができる。

次に乱れのある場合を考えてみよう。先に述べた通り、エアロジェルは空効率の高い物質であり乱れは弱いので、乱れについての摂動展開が有効であろう。準粒子 Green 関数の松原 frequency を  $\varepsilon \rightarrow \tilde{\varepsilon} \equiv \varepsilon + \text{sgn} \varepsilon / (2\tau)$  で置き換える緩和時間近似では、先に述べた通り、高圧側での強結合効果の大幅な減少という実験結果を正しく再現しない。そこで、緩和時間近似に加えて、この近似で落とされている強結合効果への乱れの影響を考慮する必要がある。我々は、緩和時間近似で記述できる自己エネルギーへの乱れの寄与に加え、2体の散乱プロセスへの乱れの影響、つまり有効相互作用への乱れの影響を考慮することにした。

有効相互作用への乱れの影響に起因した強結合効果は  $(\tau T)^{-1}$  の最低次で、図 16(C)~(F) の 1 方の FPV を不純物散乱で置き換えたものと、(A)(B) のダイアグラムに 2 体の不純物散乱プロセスを 1 つ加えたものとで表すことができ、ノンゼロの寄与をするものは図 17 に示したダイアグラムである。これらのダイアグラムは、不純物散乱自体が準粒子間相互作用のような役割を果たしているので乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果と言えよう。不純物散乱が準粒子間相互作用の役割を果たすということに注意すると、図 16(C)~(F) に 1 本不純物散乱プロセスを加えたものは有効相互作用 3 つを含むダイアグラムと同等であり、それらは  $T/F_F$  に関しより高次の寄与をするのでここでは考慮しない。さて図 17 を見ると、(a)~(i) はすべて図 16(B) に 1 本の

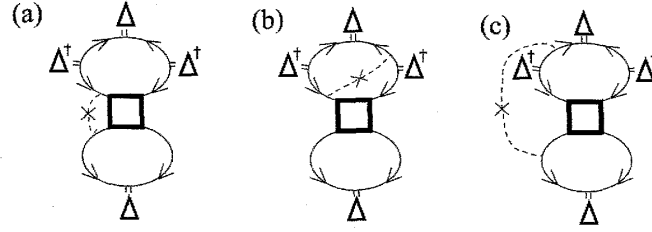


図 18: 図 16(A) から生じる乱れ誘起の強結合効果。これらは、文章中にあるようにすべて無視できる寄与である。

不純物散乱プロセスを加えたもので構成されており、図 16(A) から生じる項は存在しないことが分かるだろう。図 16(A) に 1 本の不純物散乱プロセスを加えたダイアグラムが図 18 であるが、これらが無視できる理由は以下の通りである。まず図 18(a) は、弱結合 GL4 次項における  $\text{piar-field}$  への vertex 補正に含まれるので、乱れがない場合に図 16(A) を無視したのと同じ理由で考慮する必要がない。次に図 18(b) は、vertex 補正された図 6(c) の緩和時間近似以外の弱結合 GL 四次項への乱れの寄与  $-\varepsilon_{\text{imp}}\beta_0(T)$  に対応している。この  $-\varepsilon_{\text{imp}}\beta_0(T)$  の寄与は、前述したように対状態間の自由エネルギーの差を生まないので、無視することができる。最後に図 18(c) であるが、このダイアグラムが無視できることは自明ではなく、[41] に従って準粒子 Green 関数を

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\mathbf{p}) &\rightarrow -i\pi \operatorname{sgn}\varepsilon \delta(\xi_{\mathbf{p}}), \\ G_\varepsilon(\mathbf{p})G_{-\varepsilon}(-\mathbf{p}) &\rightarrow \pi \frac{\operatorname{sgn}\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}} \delta(\xi_{\mathbf{p}}), \\ G_\varepsilon^2(\mathbf{p})G_{-\varepsilon}(-\mathbf{p}) &\rightarrow -i\pi \frac{\operatorname{sgn}\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}^2} \delta(\xi_{\mathbf{p}}) \end{aligned} \quad (44)$$

と置き換え運動量と松原 frequency についての和をとることで、この寄与がゼロとなることが分かる。以上のことから強結合効果への乱れの効果は、 $(\tau T)^{-1}$  と  $T/E_F$  の両方に関し最低次とする図 17(a)~(i) で記述できることが分かった。これらの寄与は、例えば図 17(a) については

$$\begin{aligned} \text{Fig(a)} &= \frac{1}{2}T \sum_{n_1} T \sum_{n_2} \int_{\mathbf{p}_1} \int_{\mathbf{p}_2} \int_{\mathbf{p}_3} G_{\varepsilon_1}^2(\mathbf{p}_1)G_{-\varepsilon_1}(-\mathbf{p}_1)G_{\varepsilon_1}(\mathbf{p}_3)G_{\varepsilon_2}^2(\mathbf{p}_4)G_{-\varepsilon_2}(-\mathbf{p}_4)G_{\varepsilon_2}(\mathbf{p}_2) \\ &\quad \times |u_{\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3}|^2 \Gamma_{\alpha_1, \alpha_2; \alpha_3, \alpha_4}^{(4)}(\mathbf{p}_1, \varepsilon_1, \mathbf{p}_2, \varepsilon_2; \mathbf{p}_3, \varepsilon_1, \mathbf{p}_4, \varepsilon_2) \Delta_{\alpha_1\beta}(\hat{\mathbf{p}}_1) \Delta_{\beta\alpha_3}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_1) \Delta_{\alpha_2\gamma}(\hat{\mathbf{p}}_4) \Delta_{\gamma\alpha_4}^\dagger(\hat{\mathbf{p}}_4) \end{aligned}$$

と書かれる。

計算すべきダイアグラムが求まったので、[41] に従って運動量積分を実行し松原 frequency に関する和をとって、実際に強結合効果  $\delta\beta_j$  を導出することにする。通常のダイアグラム計算と異なる点は、準粒子 Green 関数  $G_\varepsilon(\mathbf{p})$  に対して (44) 式の置き換えをすることと、FPV の松原 frequency 依存性を落とせ  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$  での FVP で計算する点である。この近似は  $T/E_F$  の最低次で強結合効果を求める場合には正しい [41]。後の計算で便利のように、FPV を無次元化した散乱振幅で書き換えることにする。

$$2N(0)\Gamma_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{(4)} = T^{(s)}\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + T^{(a)}(\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\gamma} \cdot (\boldsymbol{\sigma})_{\beta\delta}. \quad (45)$$

ここで、 $T^{(s)}$ 、 $T^{(a)}$  はそれぞれスピンの入れ換えに対し対称、非対称な散乱振幅である。FPV は、スピン 1 重項に対する散乱振幅  $T_s$  とスピン 3 重項に対する散乱振幅  $T_t$  の和で

$$2N(0)\Gamma_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(4)} = \frac{1}{2}T_s(\sigma_2)_{\alpha\beta}(\sigma_2)_{\delta\gamma} + \frac{1}{2}T_t(\sigma_2\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\beta}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\sigma_2)_{\delta\gamma}, \quad (46)$$

と表すこともでき、2通りの表記法における散乱振幅はそれぞれ以下の関係式で結びついている。

$$T_s = T^{(s)} - 3T^{(a)}, \quad T_t = T^{(s)} + T^{(a)}. \quad (47)$$

以下では、不純物散乱振幅  $|u_{\mathbf{p}}|^2$  は s 波散乱からの寄与がほとんどであると仮定する。これは、実際にはエアロジェル特有の構造によって不純物散乱は主たる s 波散乱以外にも複雑な運動量依存性をもつはずであるが、強結合効果自体が小さい補正ということもあり s 波以外の成分からの寄与はわずかと考えられるので無視するという近似である。 $\xi_{\mathbf{p}}$  積分を行い、運動量の角度積分と松原 frequency についての和を分離することができる。角度平均は少々やっかいではあるが、[41] に従って実行することができる。その結果、図 16(C)～(F) から得られる緩和時間近似での強結合効果は

$$\delta\beta_j = \delta\beta_j^C + \delta\beta_j^{E+F} + \delta\beta_j^D, \quad (48)$$

ここで、 $K = C, E + F$  に対しては

$$\delta\beta_j^K = -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)}\frac{T}{E_F}\beta_0(T)(\tilde{S}_\alpha/16)\langle W_j^K(\theta, \phi)[T^{(s)}(\theta, \phi)]^2 + V_j^K(\theta, \phi)[T^{(a)}(\theta, \phi)]^2 \rangle$$

であり、 $K = D$  に対しては

$$\begin{aligned} \delta\beta_j^D = & -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)}\frac{T}{E_F}\beta_0(T)(\tilde{S}_d/4)\langle W_j^D(\theta, \phi)[T^{(s)}(\theta, \phi)T^{(s)}(\theta', \phi') + T^{(a)}(\theta, \phi)T^{(a)}(\theta', \phi')] \\ & + V_j^D(\theta, \phi)[T^{(s)}(\theta, \phi)T^{(a)}(\theta', \phi') + T^{(a)}(\theta, \phi)T^{(s)}(\theta', \phi')] \rangle. \end{aligned} \quad (49)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \tilde{S}_E = \tilde{S}_F &= (\pi k_B T)^4 \sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3} \frac{\text{sgn}\varepsilon_1}{|\tilde{\varepsilon}_1|^2} \frac{\text{sgn}\varepsilon_2}{|\tilde{\varepsilon}_2|^2} [\text{sgn}\varepsilon_3][\text{sgn}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)], \\ \tilde{S}_D &= (\pi k_B T)^4 \sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_1|} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_2|} \frac{\text{sgn}\varepsilon_3}{|\tilde{\varepsilon}_3|^2} [\text{sgn}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3)], \\ \tilde{S}_C &= (\pi k_B T)^4 \sum_{\varepsilon_1} \sum_{\varepsilon_2} \sum_{\varepsilon_3} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_1|} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_2|} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_3|} \frac{1}{|\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_3|}. \end{aligned}$$

である。一方、図 17(a)～(i) の乱れによる有効相互作用の変化に起因する強結合効果は、一つの形にまとめることができ

$$\delta\tilde{\beta}_i = -\frac{4\pi^2}{7\zeta(3)}\beta_0(T)\frac{1}{4\pi\tau T}\frac{T}{E_F}\left(\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi\tau T}\right)\right)^2 \langle W_i^{(\text{total})}T^{(s)}(\theta, \phi) + V_i^{(\text{total})}T^{(a)}(\theta, \phi) \rangle, \quad (50)$$

が、GL 四次項の係数  $\beta_j$  への補正となる。重み関数  $W_j^K$ 、 $V_j^K$  は、文献 [47] を参照してもらうことにしてここでは省略する。 $\langle Z \rangle$  は角度平均  $\int_0^1 d(\cos(\theta/2)) \int_0^{2\pi} Z d\phi / (2\pi)$  を表している。

### 3.6.2 計算方法及び結果

強結合効果を求めるための準備は整ったので、後は準粒子の散乱振幅 (FPV) の具体的な形が必要なのである。いくつかの方法があるが [43, 44]、ここでは現実の系と最も対応関係が良いと考えられる、輸送係数などの実験結果から見積もられる Landau パラメータを用いて散乱振幅を決定する方法を [44] に用いることにする。この方法では、準粒子の FPV 関数  $\Gamma^{(4)}(\hat{p}_1, \hat{p}_2; \hat{p}_3, \hat{p}_4)$  は、2 通りの momentum transfer  $q_1 = |\hat{p}_1 - \hat{p}_3| = 2k_F \sqrt{(1-x_2)/2}$ ,  $q_2 = |\hat{p}_1 - \hat{p}_4| = 2k_F \sqrt{(1-x_3)/2}$  のみに依存するものとし、スピン一重項、三重項に対する散乱振幅はそれぞれ、 $T_s(x_2, x_3) = W_s(x_2) + W_s(x_3)$ ,  $T_t(x_2, x_3) = W_t(x_2) - W_t(x_3)$  と近似される。粒子の入れ換えに対する反対称性から  $T_s(x_2, x_3) = T_s(x_3, x_2)$ ,  $T_t(x_2, x_3) = -T_t(x_3, x_2)$  が満たされる。 $W_s, W_t$  を Legendre 多項式  $P_l(x)$  を用いて

$$\begin{aligned} W_s(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} W_l^s P_l(x), \\ W_t(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} W_l^t P_l(x), \end{aligned} \quad (51)$$

と部分波展開し、係数  $W_l^{s,t}$  の値を実験データと合うように定めることで、準粒子の FPV 関数が求まる。 $T_t(x_2, x_3)$  において  $l=0$  の部分波が存在しないことから  $W_0^t$  は無視できることに注意し、文献 [44] に従い係数  $W_l^{s,t}$  の値を決定する。 $W_l^{s,t}$  の値を決定に用いられる実験結果は、the quasiparticle lifetime, the thermal conductivity, the viscosity, the spin diffusion, Landau parameters  $F_0^s, F_0^a, F_1^s$  であり、 $W_l^{s,t}$  と様々な形で結びついている [44]。例えば、Thermal conductivity は、

$$\begin{aligned} \kappa &= (\pi^2/2) n k_B (T/T_F) v_F^2 \tau(0) S_E(\lambda_\kappa), \\ \lambda_\kappa &= \langle W(\theta, \phi) (1 + 2 \cos \theta) \rangle / \langle W(\theta, \phi) \rangle, \end{aligned}$$

と表される。 $W_{t,s}(1) = \sum_{l=0}^{\infty} W_l^{t,s}$  である。

散乱振幅を  $l=3$  まで展開しよう。

$$\begin{aligned} T_s(x_2, x_3) &= 2W_0^s + W_1^s(P_1(x_2) + P_1(x_3)) + W_2^s(P_2(x_2) + P_2(x_3)) + W_3^s(P_3(x_2) + P_3(x_3)) \\ T_t(x_2, x_3) &= W_1^t(P_1(x_2) - P_1(x_3)) + W_2^t(P_2(x_2) - P_2(x_3)) + W_3^t(P_3(x_2) - P_3(x_3)). \end{aligned} \quad (52)$$

7つの物理量  $\tau(0)T^2, \lambda_\kappa, \lambda_\eta, \lambda_D, F_0^s, F_0^a, F_1^s$  を用いて、7つのフィッティングパラメータ  $W_l^{s,t} (l \leq 3)$  を、計算して得られる物理量と実験的に得られる物理量との差の2乗の和が最小となるようにフィッティングする。(47) 式を用いると、 $T_t, T_s$  表示から  $T^{(s)}, T^{(a)}$  表示に移ることができ、強結合効果  $\delta\beta_j$  を具体的に計算できる。緩和時間近似での強結合効果  $\delta\beta_j$  は、

$$\delta\beta_j = -\beta_0(T) \frac{T}{E_F} \left[ l_j^C \tilde{S}_C + l_j^{E+F} \tilde{S}_{E+F} + l_j^D \tilde{S}_D \right], \quad (53)$$

と求まり、係数  $l_j^K$  は以下の表 2 に示した通りである。乱れがない場合には、今回の計算で得られる  $\delta\beta_j$  の値は文献 [44] とほぼ同じ値であり、以前の理論結果を正しくと再現できている。今回の



表 2: 係数  $l_j^K$  の数値計算結果。

P=12 (bar)			P=16 (bar)			P=20 (bar)			
j	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$
1	0.854	0.660	1.070	1.075	0.741	1.217	1.103	0.759	1.214
2	-1.471	15.388	-2.458	-1.673	17.570	-2.838	-1.718	18.100	-3.032
3	1.466	3.156	3.050	1.738	3.400	3.567	1.734	3.485	3.596
4	3.938	1.800	6.845	4.547	1.992	8.050	4.624	1.931	8.225
5	7.736	2.675	-1.656	8.261	2.889	-2.049	8.591	3.072	-2.202

P=24 (bar)			P=28 (bar)			P=34.4 (bar)			
j	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$	$l_j^C$	$l_j^{E+F}$	$l_j^D$
1	1.252	0.909	1.023	1.334	0.915	0.988	1.127	0.917	0.956
2	-2.103	19.958	-4.930	-2.198	21.325	-5.990	-2.179	20.052	-5.436
3	1.192	3.356	2.896	1.000	3.317	2.589	0.819	3.317	2.307
4	4.538	0.585	8.252	4.421	-0.251	8.668	4.213	-0.135	7.474
5	10.291	4.588	-3.310	11.112	5.399	-4.103	11.183	5.285	-3.256

計算では、乱れがない場合には PCP は 24 bar と求まり、これは実験から得られる PCP、22 bar とかなり近い値である。

また、(50) 式で表される乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果  $\delta\tilde{\beta}_j$  は

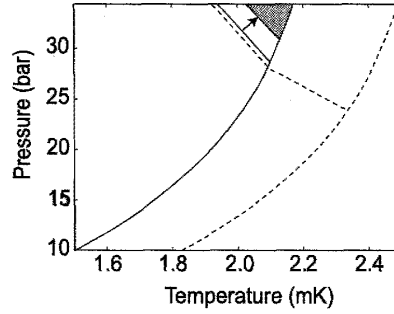
$$\delta\tilde{\beta}_j = -\frac{4\pi^2}{7\xi(3)}\beta_0(T)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4\pi\tau})^2}\right)^2\frac{1}{4\pi\tau T_{c0}}\Delta\tilde{\beta}_j, \quad (54)$$

となり、 $\Delta\tilde{\beta}_j$  の値は、表 3 に示す通りである。 $\Delta\tilde{\beta}_j$  のすべての符号が乱れがない場合の  $\Delta\beta_j$  と異符号であり、不純物散乱は ABM と BW 両方の対状態に対する強結合効果を弱めていると言える。ABM と BW の相対的な安定性については、 $|\Delta\tilde{\beta}_{\text{ABM}}| > |\Delta\tilde{\beta}_{\text{BW}}|$  が常に満たされるので、不純物効果は BW 対状態に有利に働くことが分かる。

平均場近似で得られる P-T 相図の一例を図 19 に示す。ここでは異方性の効果は考慮されていない。また、松原 frequency についての和をとる際には文献 [45] のようにカットオフを導入している。実線で描かれた  $T_{\text{AB}}(P)$  は  $(2\pi\tau)^{-1} = 0.13$  (mK) での乱れがある場合の転移線を、点線はバルク液体（乱れがない場合）の転移線を表している。図中の転移線を得るのに用いた実験データは先駆者の論文 [44] と同じものを使用しているが、フィッティングに必要な 7 つの物理量の測定はバルクの PCP より高压側においては 24, 28, 34.4 (bar) の 3 点でしか行われていない。図中で AB

表 3: 乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果  $\delta\tilde{\beta}_j$  の数値計算結果。

P (bar)	$\Delta\tilde{\beta}_1$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_2$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_3$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_4$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_5$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_{\text{ABM}}$ ( $10^{-3}$ )	$\Delta\tilde{\beta}_{\text{BW}}$ ( $10^{-3}$ )
12	-0.378	-2.360	-2.047	-3.292	-1.374	-7.026	-4.975
16	-0.642	-3.004	-2.559	-4.033	-1.868	-8.904	-6.466
20	-0.719	-3.355	-2.862	-4.538	-2.131	-10.024	-7.252
24	-0.821	-3.106	-2.643	-4.563	-2.637	-10.306	-7.209
28	-0.957	-3.074	-2.623	-4.670	-3.059	-10.804	-7.482
34.4	-0.688	-3.069	-2.670	-4.999	-2.907	-10.975	-7.282

図 19: 平均場近似で得られた  $(2\pi\tau)^{-1} = 0.13$  (mK) での相図。乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果を考慮することで、ABM 対状態が大幅に抑制されている。

転移線が折れ曲がっているのは、使えるデータが 3 点しかないので必然的になめらかに繋げないからである。外側（内側）の実線で表された AB 転移線は、乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果を考慮しない場合（する場合）に対応している。図 19 から、不純物散乱が効くと ABM 領域は狭まることが分かる。重要な点は、乱れによる有効相互作用の変化を考慮した場合の AB 転移線は高压領域においては、バルク中の AB 転移線よりも低温側に位置していることであり、これは高压側での実験結果 (1(c)) をよく再現している [47]。

### 3.6.3 異方性も考慮した場合の超流動相図

これまでの議論から、緩和時間近似では考慮されなかった乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果を取り入れることで、エアロジェル中における高压側での強結合効果の大幅な減少を説明できることが分かった。一方、低压側については、ここまでの解析でエアロジェルの異方性の効果を考慮していないため、実験で得られる相図とは大きく異なっている。そこで、前節まで考察してきたエアロジェル特有の局所的あるいは大局的異方性を考慮しよう。

低压側においてはコヒーレンス長  $\xi_0$  は十分長く  $\xi_0 \gg \xi_a$  が満たされると考えられるので（図

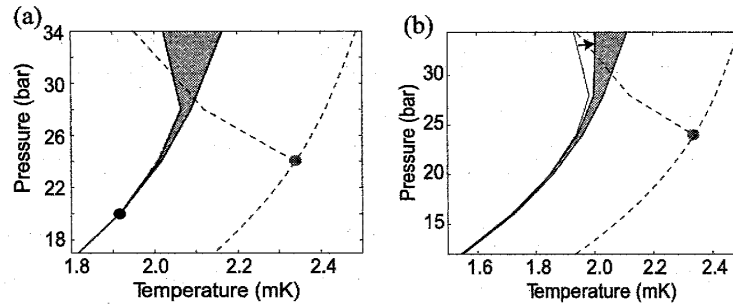


図 20: 乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果の減少と、(a) 局所的異方性 (b) わずかな一軸異方性、を考慮した場合の相図。(a) では  $1/(2\pi\tau)=0.13$  (mK),  $\gamma = 21$ 、(b) では  $(2\pi\tau)^{-1} = 0.15$  (mK),  $\delta_u = -0.005$  と選んでいる。

8(a))、エアロジェル特有の局所的異方性を秩序変数への静的乱れ (ランダムネス) として取り扱うのが適切である。結果の一例を図 20(a) に示す。 $(2\pi\tau)^{-1}$  の値は図 19 と同じ  $(2\pi\tau)^{-1}=0.13$  (mK) に選んでおり、異方性の強さは  $\gamma = 21$  である。図の実線は、乱れの局所的異方性と強結合効果への乱れの効果을考慮した AB 転移線を表しており、点線はバルクの転移線を表している。高压側での AB 転移線は厳密には正ではないもののバルクの AB 転移線の傾きよりは正に近く、また PCP の低压側へのシフトも見られ、実験で得られる相図 1(c) の特徴を比較的よく再現していると言える。

一方、高压側ではコヒーレンス長  $\xi_0$  は圧力増加と共に短くなるので、低压側とは逆に  $\xi_0 \ll \xi_a$  が満たされていると考えられる (図 8(b))。このときには、Cooper 対にとってエアロジェルはランダムネスとしては働かず、 $\xi_a$  のスケールで決まった一軸的異方性をもつ散乱ポテンシャルとして働くと考えるのが自然である。エアロジェル構造を反映した局所的な異方性によって生じる秩序変数への乱れの効果、例えば ABM 対状態における  $\hat{l}$  ベクトルの pinning、は自由エネルギーを考えたときに僅かな寄与しか与えないと考えられる。したがって、大局的に等方的なエアロジェル中相図の高压側は、一様な異方性をもつ散乱ポテンシャルを仮定した平均場近似でよく記述できると考えられる。また、これとは別の観点であるが、実験で用いられるエアロジェルが偶然にわずかな変形を受け大局的な異方性を持っている可能性もある。これら 2 つの状況いずれの場合にも、僅かではあるがノンゼロの大局的異方性を含む不純物散乱振幅を仮定した平均場近似が物性をよく記述すると思われる。強結合効果への異方性の効果は十分小さく無視できると考えられるので、以前の一軸異方性をもつエアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  の議論で、GL 四次項への強結合効果の寄与を  $\delta\tilde{\beta}_j + \delta\beta_j$  に置き換えるだけでよい。エアロジェルに一軸異方性が加えられた場合には T-P 相図において ABM 領域は広がり、特に伸張を加えた場合にはバルク中では存在しない polar 対状態が  $T_c(P)$  のごく近傍に現われていた。乱れによる有効相互作用の変化から生じる強結合効果  $\delta\tilde{\beta}_j$  は ABM 対状態の安定性を弱めることが分かったので、 $\delta\tilde{\beta}_j$  の導入は 1 軸的異方性がある場合も ABM 領域を狭めると予想される。ここでは紙面の都合上結果を示さないが、実際、ABM 領域は高压側で不純物散乱によってその存在領域を狭められることが分かった。一方、polar 対状態

は GL 二次項への異方性の効果によって誘起されるので、四次項への補正である強結合効果の変化には影響を受けない。

それでは、一軸異方性が充分弱くより現実の系に近い状況を考察しよう。一軸伸張の強さを  $\delta_u = -0.005$  にしたときの結果を図 20(b) に示す。異方性の強さ  $|\delta_u|$  が小さいため図で見えない程 polar 領域は狭く、ABM 領域は緩和時間近似で得られる三角領域よりも低圧側まで生き残り PCP が存在しない。また高圧側において AB 転移線の傾き  $dT_{AB}/dP$  が負から正になっている。つまり、高圧側において重要であると考えられる一様な異方性と乱れによる有効相互作用の変化によって生じる強結合効果  $\delta\tilde{\beta}_j$  を考慮することで、特に高圧側の振る舞いに関して実験から見積もられる相図に近い結果を得ることができるわけである。

さらに、図 20(b) は、実験で得られる相図 1(c) と高圧側だけでなく全体的によく似た形をしており、エアロジェル中超流動  $^3\text{He}$  相図の理解には、エアロジェル生成過程で偶発的に加えられる可能性のある大局的異方性を考慮する必要があるのかもしれない。PCP がバルク中に比べ低圧側にシフトするという低圧側の特徴に関して、一様な異方性を仮定したときに PCP が存在しないという理論結果は、A-like 相は低圧側まで存在しているが存在領域が狭すぎて実験で観測できていない可能性を示唆している。また、低圧側では  $\xi_0 \gg \xi_a$  が満たされると考えられるので、この場合にはエアロジェル構造の局所的異方性による  $T_c$  のシフトが、僅かにしか存在しない大局的異方性による  $T_c$  シフトを上回り、局所的異方性が A-like 相を誘起しているという描像がより適切かもしれない。

以上のことから、エアロジェル特有の異方性と、乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果を考慮することで、エアロジェル中の A-like 相はバルクの A 相同様 ABM 対状態であると結論される [35, 47, 28, 27]。

## 4 まとめ

本稿では、乱れの異方性と強結合効果への乱れの効果を考慮しエアロジェル中での超流動  $^3\text{He}$  相図について理論的考察を行った。

通常の大局的に等方的なエアロジェル中においては、注目する圧力領域によってエアロジェルの微細構造に起因した異方性の果たす役割が異なる。コヒーレンス長  $\xi_0$  がエアロジェルの相関長  $\xi_a$  より十分長いと考えられる低圧側 ( $\xi_a \ll \xi_0$ ) では局所的異方性が重要であり、Cooper 対にとってエアロジェルはランダムネスとして働くと考えられる。この場合には、エアロジェル特有の異方性は超流動転移温度  $T_c$  をシフトさせる働きをもち、異方的対状態に対し  $T_c$  が高くなる。低圧側では、局所的異方性が ABM 対状態を安定化させ、これが PCP が低下する原因である。また、ABM 対状態においては、秩序変数の軌道自由度  $\hat{l}$  ベクトルがエアロジェルの構造に pin され長距離秩序を失うものの準長距離秩序は保つことが分かり、これは ABM 対状態は超流動相として存在できることを意味している。転移点直下やそれより低温側の領域で、他の対状態の存在も検討したが、ABM、BW 以外の対状態は実現しないことも分かった。

一方、 $\xi_a \gg \xi_0$  が満たされる高圧側では、エアロジェル構造から生じる異方性は Cooper 対にとって長スケールの大局的異方性として働くと考えるのが適切であろう。この大局的に等方的なエアロジェルの高圧側は、エアロジェルに人為的に一軸的な圧縮、伸張を加えた系と本質的に同等であり、両者を意識しながら大局的に一様な異方性をもつエアロジェル中で実現する対状態を調べた。局所的異方性と同様に、大局的異方性も  $T_c$  のシフトを生み、異方的対状態を安定化させる。一軸圧縮の場合には、PCP の消失、ABM 領域の拡大が見られた。この ABM 対状態は  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが圧縮軸方向に pin された長距離秩序をもつ状態である。一軸伸張の場合には、圧縮の場合と同様の PCP 消失、ABM 領域の拡大という特徴に加え、超流動転移点付近で polar 対状態が存在する。細孔中の超流動  $^3\text{He}$  では、転移点付近で polar-ABM 混合状態が実現するが、今の場合秩序変数の変化を調べると、混合状態ではない純粋な polar 対状態が実現しており、polar-ABM は二次転移であることが分かった。この polar 対状態は秩序変数の軌道部分を特徴付ける  $\hat{\mathbf{m}}$  ベクトルが伸張軸に pin され長距離秩序を持つが、ABM 対状態は  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが伸張軸に垂直な面内に固定された長距離秩序を持たない超流動グラス相である。

強結合効果は準粒子間の有効相互作用を正しく扱うことで得られる補正であり、バルク中の高温高圧側で ABM 対状態を安定化させている。エアロジェル中においては有効相互作用の不純物散乱による変化が重要な役割を果たしていることが分かった。緩和時間近似では取り入れられていなかった乱れによる有効相互作用の変化に起因した強結合効果は、緩和時間近似で得られる強結合効果を弱める傾向にあり、これがエアロジェル中における強結合効果の大幅な減少の原因である。高圧側では強結合効果への乱れの効果と大局的異方性を考慮することで AB 転移線の傾きが正になる傾向にあり、低圧側では先に述べた通り局所的異方性が PCP を下げ、実験結果から見積もられる相図の低圧側と高圧側いずれの特徴もよく再現する相図を得ることができた。また、大局的な異方性を導入した場合には、ほんの僅かな異方性を考慮するだけで、大局的に等方的だと考えられているエアロジェル中での実験相図を再現できたが、これは等方的だと考えられているエアロジェルサンプルも、製造過程などを通じて実はわずかながら大局的な異方性を含んでいるという可能性を示唆している。いずれにせよ、乱れの異方性の効果に加え、乱れによる有効相互作用の変化に由来した強結合効果を考慮することでエアロジェル中の相図の特徴を説明でき、A-like 相はバルクの A 相同様 ABM 対状態であると結論される。

## 5 今後の展望

一軸的異方性のあるエアロジェルの理論研究を背景に、エアロジェルを一軸的に変形させた系で実験が行われている [48, 49, 50, 52]。音波を用いた実験で一軸圧縮による A-like 相領域の拡大 [52] が確認され、NMR 実験を通じて、一軸圧縮、伸張されたエアロジェル中 A-like 相 (ABM 対状態) においては、我々が提唱した通り、一軸変形によって  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが異方的に固定されることが分かった [48, 49]。エアロジェルに一軸異方性を加えることで超流動の軌道自由度を制御できるという事実は大きなインパクトを持つ。というのも、バルク中の A 相においては、スピン軌道相互作用 (ダイポール相互作用) によってスピン自由度を表す  $\hat{\mathbf{d}}$  ベクトルと軌道自由度  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルが並

行 ( $\hat{\mathbf{d}}/\hat{\mathbf{l}}$ ) に保たれるが、エアロジェル中では外部から異方性を加えることで、これまで実現し得なかった  $\hat{\mathbf{d}} \perp \hat{\mathbf{l}}$  の状況を作り出せ、新しい物理現象を観測できる可能性があるからである。実際、一軸圧縮したエアロジェル中の磁場  $\mathbf{H}$  下の A-like 相においては、 $\hat{\mathbf{d}} \perp \hat{\mathbf{l}}/\mathbf{H}$  の状況で、サンプル全体で位相の揃った磁化の歳差運動が観測されており [50]、この現象はマグノンの Bose-Einstein 凝縮という観点から議論されている [51]。また、一軸異方性をもつエアロジェル中  $^3\text{He}$  の超流動相における渦に着目すると、渦芯構造に一軸異方性が反映される可能性がある。これは、渦芯が normal 状態である s-波超流動とは異なり、超流動  $^3\text{He}$  では秩序変数が多成分であることにより渦芯でも超流動が保たれるためである。B-like 相においては、変形軸方向に伸びる渦の芯構造に A-like 相の  $\hat{\mathbf{l}}$  ベクトルの異方性が反映され、バルクの B 相とは大きく異なる渦心転移温度 [55, 56] の圧力依存性が期待される [53]。さらに、一軸伸張したエアロジェル中 A-like 相における渦では、polar-ABM 転移点近くではバルクで出現する Mermin-Ho 渦の代わりに非軸対称な polar 芯を持つ特異な渦が出現し得ることも分かった [54]。一方、一軸圧縮の場合には、half-quantum 渦の出現が期待されている [27]。一軸変形を加えたエアロジェル中で実現する可能性のあるこうした興味深い物理現象が今後実験的に観測されることが期待され、観測手段の提案も含めさらなる理論研究が求められている。

## 謝辞

本稿を執筆するにあたり、共同研究者である池田隆介氏には原稿に目を通しアドバイスして頂き、誠に感謝致しております。また、水島健、柳瀬陽一の両氏には、筆者の遅筆をお詫びするとともに、この様な執筆の機会を与えてくださったことに感謝しています。

## 参考文献

- [1] D. Volhardt and P. Wolfle, *The Superfluid Phases of Helium 3* (Taylor and Fransis, London, 1990).
- [2] For a review, see W. P. Halperin, H. Choi, J. P. Davis, and J. Pollanen, J. Phys. Soc. Jpn. **77** (2008), 111002.
- [3] J. Porto and J. Parpia, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), 4667.
- [4] G. Baramidze and G. Kharadze, J. Phys. Condens. Matter **14** (2002), 7471.
- [5] G. Gervais, K. Yawata, N. Mulders, and W.P. Halperin, Phys. Rev. B **66** (2002), 054528.
- [6] B.I. Barker, Y. Lee, L. Polukhina, and D.D. Osheroff, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), 2148.
- [7] W.P. Halperin and J.A. Sauls, cond-mat/0408593.

- [8] E.Nazaretski, N.Mulders, and J.M.Parpia, J. Low. Temp. Phys. **134** (2004), 763.
- [9] J.E. Baumgardner and D.D. Osheroff, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 055301.
- [10] J.E. Baumgardner and D.D. Osheroff, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 155301.
- [11] C. L. Vicente, H. C. Choi, J. S. Xia, W. P. Halperin, N. M. Mulders, and Y. Lee, Phys. Rev. B **72** (2005), 094519.
- [12] H. Alles, J. J. Kaplinsky, P. S. Wootton, J. D. Reppy, J. H. Naish, and J. R. Hook, Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 1367.
- [13] V. V. Dmitriev, V. V. Zavjalov, D. E. Zmeev, I. V. Kosarev, and N. Mulders, JETP Lett. **76** (2002), 312
- [14] H. C. Choi, A. J. Gray, C. L. Vicente, J. S. Xia, G. Gervais, W. P. Halperin, N. Mulders, and Y. Lee, Phys. Rev. Lett. **93** (2004), 145302.
- [15] E.V. Thuneberg, S.K. Yip, M. Fogelstrom, and J.A. Sauls, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), 2861.
- [16] D. T. Sprague, T. M. Haard, J. B. Kycia, M. R. Rand, Y. Lee, P. J. Hamot, and W. P. Halperin, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4568.
- [17] I. A. Fomin, J. Low Temp. Phys. **134** (2004), 769.
- [18] 山田一雄、大見哲巨, 「超流動」 (培風館, 1995)
- [19] 恒藤敏彦, 「超伝導・超流動」 (岩波書店, 1997)
- [20] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations* (Cambridge University Press, 1987).
- [21] K. Nagai, J. Low. Tem. Phys, **55** (1984), 232.
- [22] A. J. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975).
- [23] W.F. Brinkman, J.W. Serene, and P.W. Anderson, Phys. Rev. A **10** (1974), 2386.
- [24] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, and I. E. Dzyaloshinski, *Method of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Dover Publications, New York, 1975).
- [25] G.E. Volovik, JETP Lett. **63** (1996), 301.
- [26] Y. Imry and S. Ma, Phys. Rev. Lett. **35** (1975), 1399.

- [27] G. E. Volovik, J. Low. Temp. Phys. **150** (2008), 453.
- [28] D. I. Bradley, S. N. Fisher, A. M. Guenault, R. P. Haley, N. Mulders, S. O'Sullivan, G. R. Pickett, J. Roberts, and V. Tsepelin, Phys. Rev. Lett. **98** (2007), 075302.
- [29] H. Choi, J. P. Davis, J. Pollanen, T. M. Haard, and W. P. Halperin, Phys. Rev. B **75** (2007), 174503.
- [30] For instance, see T. C. Lubensky: *ill-condenced matter*
- [31] Hideharu Ishida, Hiroto Adachi and Ryusuke Ikeda, JPSJ **71** (2002), 245.
- [32] G.Tarjus and V.Dotsenko, J. Phys. A **35** (2002), 1627.
- [33] T.Giamarchi and P.Le Doussal, Phys. Rev. B **52** (1995), 1242.
- [34] A.I. Larkin, JETP **31** (1970), 784.
- [35] K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. B **72** (2005), 012515.
- [36] R. Ikeda and K. Aoyama, Phys. Rev. B **79** (2009), 064527.
- [37] Y. Kuroda and A.D.S. Nagi, J. Low Temp. Phys. **23** (1976), 751.
- [38] For a review, see T.Timusk and B.Statt, Rep. Prog. Phys. **62** (1999), 61.
- [39] Y.H. Li and T. Ho, Phys. Rev. B **38** (1988), 2362.
- [40] K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. B **73** (2006), 060504 (R).
- [41] D. Rainer and J. W. Serene, Phys. Rev. B **13** (1976), 4745.
- [42] D. Rainer and J. W. Serene, in *Quantum Statistics and the Many-Body Problem*, edited by S. B. Trickey, W. P. Kirk, and J. W. Dufty (Plenum, New York, 1975).
- [43] P. Brussaard, M.A. Baranov, M.Yu. Kagan, Ch.G. van Weert and H.W. Capel, Physica A **234** (1997), 643.
- [44] J. A. Sauls and J. W. Serene, Phys. Rev. B **24** (1981), 183.
- [45] J. A. Sauls and J. W. Serene, Physica B **108** (1981), 1137.
- [46] J.C. Wheatley, Rev. Mod. Phys. **47** (1975), 415.
- [47] K. Aoyama and R. Ikeda, Phys. Rev. B **76** (2007), 104512.
- [48] T. Kunimatsu, T. Sato, K. Izumina, A. Matsubara, Y. Sasaki, M. Kubota, O. Ishikawa, T. Mizusaki, and Yu. M. Bunkov, JETP Lett. **86** (2007), 216.



- [49] J. Elbs, Yu. M. Bunkov, E. Collin, H. Godfrin, and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **100** (2008), 215304.
- [50] T. Sato, T. Kunimatsu, K. Izumina, A. Matsubara, M. Kubota, T. Mizusaki, and Yu. M. Bunkov: Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 055301.
- [51] Yu. M. Bunkov and G. E. Volovik, JETP Lett. **89** (2009), 306.
- [52] P. Bhupathi, B. H. Moon, M. Gonzalez, and Y. Lee, J. Low. Temp. Phys. DOI 10.1007/s10909-009-9938-3 (2009).
- [53] K. Aoyama and R. Ikeda, J. Low Temp. Phys. DOI 10.1007/s10909-009-0012-y (2009).
- [54] K. Aoyama and R. Ikeda, J. Phys. : Conference Series **150** (2009), 032005.
- [55] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, Rev. Mod. Phys. **59** (1987), 533.
- [56] E. V. Thuneberg , Phys. Rev. B **36** (1987), 3583.